UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
COLEGIADO DE MATEMÁTICA
Licenciatura em Matemática
UNIOESTE - *Campus* de Cascavel

Eduardo Ghisi
Fabiana Fatima Delabona
Milena Cristina Heydt

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO II
PROMAT

CASCAVEL
2022

Eduardo Ghisi
Fabiana Fatima Delabona
Milena Cristina Heydt

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:
ESTÁGIO SUPERVISIONADO II
PROMAT

Relatório apresentado pelos acadêmicos Eduardo Ghisi, Fabiana Fatima Delabona e Milena Heydt, como parte integrante da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino da Matemática – Estágio Supervisionado II.

Orientadora: Profª. Pamela Gonçalves

CASCAVEL
2022

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Este relatório, para a disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática - Estágio Supervisionado II, contém descrições dos momentos nos quais estivemos exercendo a prática docente para o projeto intitulado: Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática - PROMAT. Este projeto está vinculado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste/*Campus* Cascavel-PR.

No ano de 2022, nosso exercício de prática ocorreu no segundo semestre letivo da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, de 21 de maio a 09 de julho. Neste ano realizamos sete encontros presenciais com os alunos inscritos no projeto e três aulas assíncronas. Foram necessárias essas aulas assíncronas devido ao calendário acadêmico, pois não teríamos tempo suficiente para realizar todos os dez encontros presenciais.

As aulas aconteciam aos sábados no turno da manhã, iniciavam as 8 horas até as 11 horas e 40 minutos. A organização dos conteúdos trabalhados nos encontros foram: trigonometria, geometria analítica, análise combinatória e tratamento da informação. Os conteúdos estão especificados na subseção 2.2 deste relatório.

No relatório, estão presentes em sequência, a opção teórica e metodológica utilizada em nossas aulas, o cronograma com as datas e conteúdos trabalhados em cada encontro realizado no segundo semestre de 2022, os planos com o planejamento de cada aula seguido de cada relatório e as nossas considerações finais.

2. PROMAT

O PROMAT é um Projeto de Ensino institucional ofertado pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná, especificamente pelo Colegiado de Licenciatura em Matemática. É nele que parte da carga horária e das atividades de estágio que os alunos do curso devem cumprir são realizadas. O projeto visa atender alunos da rede pública estadual de ensino. As atividades são direcionadas aos estudantes que buscam ingressar no ensino superior. São ofertados conteúdos de matemática da Educação Básica exigidos nos concursos de vestibulares da Unioeste, no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM e em outros processos seletivos.

O PROMAT tem duração de um ano letivo e para o ingresso dos estudantes, são realizados dois processos seletivos, sendo um no início do curso e outro na metade. Para o primeiro semestre são trabalhados os conteúdos do ensino fundamental e os professores são os alunos da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino da Matemática – Estágio Supervisionado I do curso de Licenciatura em Matemática. No segundo semestre, são abordados conteúdos referentes ao ensino médio e os professores são os alunos da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino da Matemática – Estágio Supervisionado II.

Geralmente o segundo semestre do projeto possui dez encontros presenciais, porém como mencionamos anteriormente, neste ano ocorreram sete encontros presenciais e três aulas assíncronas. Para as aulas assíncronas, gravamos um vídeo referente a aula planejada e hospedamos na plataforma Youtube. Cada link foi enviado através de um grupo de WhatsApp que utilizávamos para nos comunicarmos com os alunos.

2.1 OPÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

Como opção teórica e metodológica escolhemos a Resolução de problemas. Acreditamos que está é uma metodologia que que desenvolve o raciocínio, a criatividade e o pensamento matemático do aluno. Também pensamos que as aulas se tornam mais dinâmicas e atraentes, quebrando com o paradigma do ensino totalmente tradicional.

"A resolução de problemas significa envolver-se em uma tarefa ou atividade cujo método de solução não é conhecido imediatamente" (ROMANATTO, 2012, p. 302). Nesse sentido, percebemos que a Resolução de Problemas não significa aplicar listas de exercícios ao final de um conteúdo. Além do mais, devemos observar que exercício e problema são coisas diferentes, "um problema se diferencia de um exercício na medida em que, neste último caso, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução" (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p.16). Nesta metodologia, o problema é o ponto de partida para a aprendizagem matemática, invertendo-se a lógica tradicional em que o conteúdo de matemática é apresentado nas escolas, ou seja, primeiro a definição seguida de exemplos e então exercícios (MÜLLER, 2000).

A importância dos problemas matemáticos no ensino é percebida nos documentos educacionais brasileiros que dentre suas orientações, sugerem trabalhar com problemas matemáticos em sala de aula. Como podemos perceber na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que destaca que no Ensino Médio os estudantes devem desenvolver habilidades que servirão para resolverem problemas ao longo de suas vidas. Podemos pensar nisso na formação do aluno como cidadão, que no futuro, ao sair da escola, vai se deparar com situações que precisarão encontrar uma solução por conta própria.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), consideram necessária a compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos tanto para o cidadão ter suas conclusões e fazer argumentações, quanto para agir como consumidor prudente ou tomar decisões em suas atividades em sociedade. Para isso, neste mesmo documento encontramos alguns objetivos que o ensino da matemática possui no Ensino Médio. Dentre eles, dois objetivos envolvem resolver problemas, estes são: "desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo; utilizar com confiança os procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos" (BRASIL, 2000, p. 42).

Além de trabalhamos com a Resolução de Problemas, vamos utilizar os problemas como ponto de partida do conhecimento matemático. De acordo com Schororder e Lester (1989), há três maneiras diferentes de abordar a Resolução de Problemas: ensinar *sobre* a Resolução de Problemas, ensinar *para* a Resolução de Problemas e ensinar *através* da Resolução de Problemas.

Segundo Schrorder e Lester (1989), ao ensinar sobre a Resolução de Problemas, os alunos são ensinados sobre as fases de resolver um problema, isto é, o professor que tem essa abordagem se baseia no modelo de resolver problemas de Polya (1995), o qual descreve quatro passos para resolver um problema. O primeiro é fazer a compreensão do problema, ou seja, interpretá-lo, entender claramente o que se deseja solucionar. O segundo passo é o estabelecimento de um plano, isto é, elaborar uma estratégia, encontrar alguma relação entre os dados dos problemas e a incógnita, pensar em esquemas e cálculos. O terceiro passo é executar o plano estabelecido, por ele em prática, realizar os cálculos ou desenhos que cheguem em uma conclusão para o problema. Por fim, o quarto passo é fazer o retrospecto da solução, isto é, retomar o problema e analisar o processo de resolução, neste momento podem ser encontrados equívocos na execução do plano, ou até mesmo perceber que o plano estabelecido não faz sentido para aquela situação.

Ao ensinar para a Resolução de Problemas o foco do ensino está na aplicação do conhecimento matemático, ou seja, o professor se concentra em como a matemática ensinada pode ser utilizada para resolver problemas. Nessa abordagem, o proposito principal de aprender matemática é ser capaz de usá-la.

Já ao se ensinar através da Resolução de Problemas, o problema não é considerado apenas como um proposito para se aprender matemática, é valorizado como um meio de se fazer isso. O ensino do conteúdo matemático começa com um problema e as técnicas matemáticas são desenvolvidas como resposta para ele. Acreditamos que está seja a melhor maneira de abordar a metodologia, pois dessa forma o aluno participa da construção do conhecimento.

2.2 Cronograma

Neste tópico está o cronograma dos dez encontros do PROMAT. Ressaltamos que sete encontros ocorreram presencialmente e três assíncronos.

Quadro 1: Cronograma.

Encontro	Data	Conteúdo
1	21/05	Trigonometria: Seno, cosseno, tangente no triângulo retângulo.
2	28/05	Trigonometria: Circunferência, tipos de funções (seno, cosseno e tangente), domínio e imagem e período.
3	04/06	Trigonometria: Relações trigonométricas.
4	Assíncrono	Geometria analítica: Coordenadas cartesianas no plano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, pontos colineares.
5	11/06	Geometria analítica: Equação geral e reduzida da reta, posições relativas envolvendo ponto, circunferência e reta.
6	25/06	Geometria analítica: Equação geral e reduzida da circunferência, posições relativas envolvendo ponto, circunferência e reta.
7	Assíncrono	Análise combinatória: Princípio fundamental da contagem.
8	02/07	Análise combinatória: Permutação, arranjo e combinação.
9	09/07	Análise combinatória: Probabilidade.
10	Assíncrono	Tratamento da informação: Interpretação de gráficos, tabelas e esquemas.

Fonte: Próprios autores.

2.3 Módulo/encontro 1 –

2.3.1 Plano de aula

PLANO DE AULA

Conteúdo: Trigonometria no triângulo.

Público-Alvo: Alunos egressos da Rede Pública de Ensino CASCAVEL, inscritos no projeto.

Objetivo geral: Introduzir o conteúdo das relações trigonométricas em triângulos.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com trigonometria no triângulo, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar as relações trigonométricas em um triângulo;
- Utilizar as relações trigonométricas em situações reais;
- Resolver problemas que envolvem essas relações;

Tempo de execução: Um encontro de 4 horas.

Recursos didáticos: Quadro negro, giz, PowerPoint,

Encaminhamento metodológico:

Para dar início à aula, os professores farão uma dinâmica de apresentação, onde será solicitado aos alunos que se levantem e formem um círculo. A seguir, um dos professores jogará uma bola para um estudante e pedira que se apresente falando o nome e o motivo por estar fazendo o PROMAT

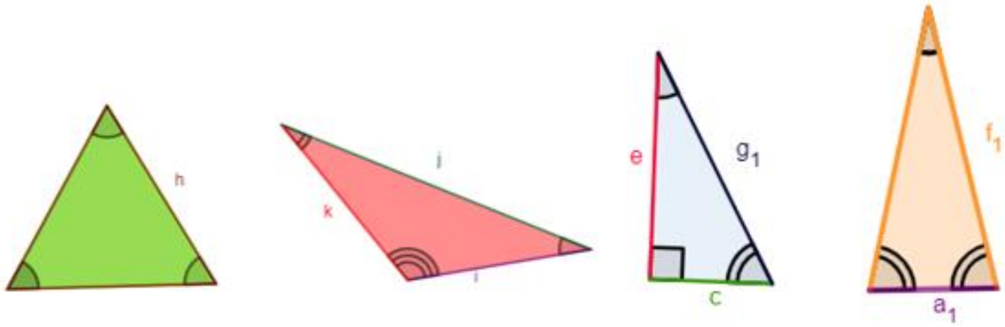
Após isso, solicitaremos que esse aluno jogue a bola para qualquer outro, esse que por sua vez irá repetir o mesmo processo, e assim, sucessivamente até que todos tenham se apresentado.

Em seguida, os professores darão início ao conteúdo relembrando alguns conceitos que são necessários para a compreensão do conteúdo. Para essa retomada de conteúdo, serão utilizados *slides* em PowerPoint.

Inicialmente, serão relembradas algumas propriedades dos triângulos:

Os triângulos possuem propriedades e definições de acordo com as características de seus lados e ângulos. Serão mostradas as figuras abaixo e será pedido aos alunos para classificar cada triângulo de acordo com as medidas do lado e dos ângulos de cada um deles. Espera-se que os alunos consigam classificá-los em relação ao lado como equilátero, escaleno e isósceles, respectivamente, e em relação aos ângulos como acutângulo, obtusângulo e retângulo, respectivamente.

Figura 1:Tipos de triângulo.



Fonte: Próprios autores.

Equilátero Acutângulo	Escaleno Obtusângulo	Escaleno Retângulo	Isósceles Acutângulo

Será passado brevemente as definições de cada um dos triângulos e durante a explanação das definições, será retomada a Figura 1 para exemplificação:

Triângulo Equilátero: Possui todas as medidas de seus lados **iguais**.

Triângulo Escaleno: Possui todas as medidas de seus lados **diferentes.**

Triângulo Isósceles: Possui a medida de **dois dos seus lados iguais.**

Triângulo acutângulo: Possui todos os ângulos **menores que 90°.**

Triângulo obtusângulo: Possui um ângulo que é **maior que 90°.**

Triângulo retângulo: Possui um ângulo reto, ou seja, **igual a 90°.**

Em seguida, será explicado que apesar de existirem essas classificações, o foco da aula, no momento, será o triângulo retângulo, o qual será relembrado o teorema de Pitágoras, muito utilizado na trigonometria.

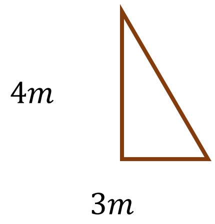
Para isso, será passado o seguinte exercício para que os alunos tentem resolver. Posteriormente, o exercício será corrigido e formalizado o Teorema de Pitágoras.

Exercício 1: Observe a Figura 2. Qual era a altura do poste?

Figura 2: Situação problema.

Fonte: Próprios autores.

R: O poste quebrado forma um triângulo onde $3m$ é a distância entre a extremidade da parte quebrada e a base do poste. Também temos o valor da altura do pedaço do poste que ficou em pé. Desse modo, podemos representar o triângulo formado da seguinte forma:



Para descobrirmos a altura que o poste tinha antes de ser quebrado, precisamos encontrar a medida do pedaço do poste que está quebrado. Para isso, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras, uma vez que o triângulo formado é um triângulo retângulo, pois o poste em pé forma um ângulo de 90° com o chão e temos as medidas dos dois catetos. Logo, a parte quebrada corresponde à hipotenusa do quadrado. Assim,

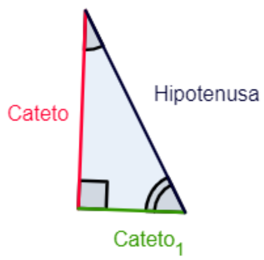
$$h^2 = co^2 + ca^2$$
$$\Rightarrow h^2 = 4^2 + 3^2$$
$$\Rightarrow h^2 = 16 + 9$$
$$\Rightarrow h^2 = 25$$
$$\Rightarrow h = \sqrt{25}$$
$$\Rightarrow h = 5$$

A raiz negativa descartamos, pois no problema queremos saber uma medida. Desse modo, a altura do poste era $h = 4 + 5 = 9$.

Após a resolução do exercício, será formalizado o Teorema de Pitágoras:

Teorema de Pitágoras: Em um triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma do quadrado dos comprimentos dos outros dois lados (catetos).

Figura 3: Triângulo retângulo.



Fonte: Próprios autores.

$$Hipotenusa^2 = cateto^2 + cateto_1^2$$

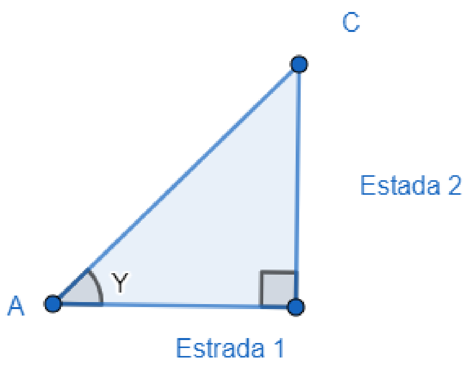
Após isso, para introduzir as relações trigonométricas no triângulo retângulo vamos passar o vídeo "Um caminho para o curral" disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1061. Neste vídeo, um fazendeiro descobre que a ponte que utilizava para chegar até o curral para alimentar seus animais tinha sido destruída pelos fortes temporais que tiveram na região. Com isso, o fazendeiro busca pela ajuda de seu afilhado. Analisando a situação e através de conceitos do triângulo retângulo o jovem encontra uma solução. O novo caminho seria passar pelo milharal. A situação está ilustrada na Figura 3.

Figura 4: Um caminho para o curral.

Fonte: M3 Matemática Multimídia.

O primeiro passo para resolver o problema é observar que o caminho usual que o fazendeiro realiza são os catetos de um triângulo retângulo, sendo a hipotenusa o menor caminho entre a fazenda e o curral, mesmo passando pelo milharal.

Figura 5: Triângulo retângulo.



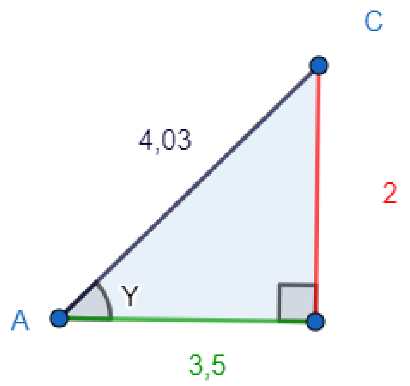
Fonte: Próprios autores.

O segundo passo, seria determinar o comprimento da hipotenusa que será a distância que o fazendeiro vai percorrer da fazenda até o curral. Como temos as duas medidas dos dois catetos, podemos fazer isso utilizando o teorema de Pitágoras.

$$AC^2 = 2^2 + 3{,}5^2$$
$$\Longrightarrow AC^2 = 4 + 12{,}25$$
$$\Longrightarrow AC = \sqrt{16{,}25}$$
$$\Longrightarrow AC = 4{,}031$$

Por último, determinar a inclinação que se deve entrar no milharal, de modo a manter o percurso em linha reta. Para isso, como temos a medida da hipotenusa e dos dois catetos, podemos determinar o seno e o cosseno do ângulo através das relações trigonométricas.

Figura 6: Triângulo retângulo.



Fonte: Próprios autores.

$$seno(Y) = \frac{cateto\ oposto \text{ à } Y}{Hipotenusa\ (AC)}$$

$$seno(Y) = \frac{2}{4{,}03} = 0{,}50$$

$$cosseno(Y) = \frac{cateto\ adjacente \text{ à } Y}{Hipotenusa\ (AC)}$$

$$cosseno(Y) = \frac{3{,}5}{4{,}03} = 0{,}87$$

Com os valores de seno e cosseno determinados, podemos encontrar o valor do ângulo:

$$cosseno(Y) = 0{,}87 \Longrightarrow cosseno(0{,}87)^{-1} = Y \Longrightarrow Y = 30°$$

$$seno(Y) = 0{,}50 \Longrightarrow seno(0{,}50)^{-1} = Y \Longrightarrow Y = 30°$$

Para cada passo da resolução do problema, vamos pausar o vídeo e deixar os alunos tentarem resolver ou pensarem em uma ideia.

Após o vídeo, vamos formalizar as relações trigonométricas.

O seno do ângulo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

$$sen\ \propto = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

O cosseno do ângulo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

$$\cos \propto = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

A tangente do ângulo é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente.

$$\text{tg} \propto = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

A tangente também pode ser calculada como a razão entre o seno do ângulo pelo cosseno do ângulo. Inclusive é interessante perceber que

$$\text{tg} \propto = \frac{sen \ \propto}{\cos \propto},$$

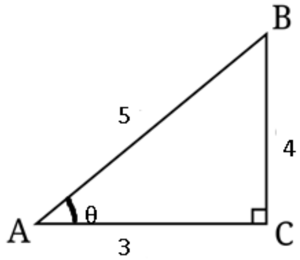
ou seja,

$$\text{tg} \propto = \frac{\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}}{\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}}$$

$$\text{tg} \propto = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

Exemplo: Calcular o seno, cosseno e tangente do ângulo θ no triangulo retângulo abaixo.

Figura 7: Triângulo retângulo.



Fonte: Próprios autores.

$$sen\ \theta = \frac{(cateto\ oposto)}{hipotenusa} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\cos\ \theta = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{4}{3} = 1{,}333$$

Ou ainda, como

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{sen}\ \theta}{\cos\ \theta},$$

e sabemos os valores de $\text{sen}\ \theta$ e $\cos\theta$, temos que

$$\text{tg}\,\theta = \frac{0{,}8}{0{,}6} = 1{,}333$$

Observando na tabela dos senos e cossenos concluímos que $\theta = 53°$

Figura 8: Tabela dos senos, cossenos e tangentes.

Ângulo	seno	cosseno	tangente
1°	0.018	1.000	0.018
2°	0.035	0.999	0.035
3°	0.052	0.999	0.052
4°	0.070	0.998	0.070
5°	0.087	0.996	0.087
6°	0.104	0.995	0.105
7°	0.122	0.993	0.123
8°	0.139	0.990	0.141
9°	0.156	0.988	0.158
10°	0.174	0.985	0.176
11°	0.191	0.982	0.194
12°	0.208	0.978	0.213
13°	0.225	0.974	0.231
14°	0.242	0.970	0.249
15°	0.259	0.966	0.268
16°	0.276	0.961	0.287
17°	0.292	0.956	0.306
18°	0.309	0.951	0.325
19°	0.326	0.946	0.344
20°	0.342	0.940	0.364
21°	0.358	0.934	0.384
22°	0.375	0.927	0.404
23°	0.391	0.920	0.424
24°	0.407	0.913	0.445
25°	0.423	0.906	0.466
26°	0.438	0.899	0.488
27°	0.454	0.891	0.509
28°	0.469	0.883	0.532
29°	0.485	0.875	0.554
30°	0.500	0.866	0.577
31°	0.515	0.857	0.601
32°	0.530	0.848	0.625
33°	0.545	0.839	0.649
34°	0.559	0.829	0.674
35°	0.574	0.819	0.700
36°	0.588	0.809	0.727
37°	0.602	0.799	0.754
38°	0.616	0.788	0.781
39°	0.629	0.777	0.810
40°	0.643	0.766	0.839
41°	0.656	0.755	0.869
42°	0.669	0.743	0.900
43°	0.682	0.731	0.932
44°	0.695	0.719	0.966
45°	0.707	0.707	1.000

Ângulo	seno	cosseno	tangente
46°	0.719	0.695	1.036
47°	0.731	0.682	1.072
48°	0.743	0.669	1.111
49°	0.755	0.656	1.150
50°	0.766	0.643	1.192
51°	0.777	0.629	1.235
52°	0.788	0.616	1.280
53°	0.799	0.602	1.327
54°	0.809	0.588	1.376
55°	0.819	0.574	1.428
56°	0.829	0.559	1.483
57°	0.839	0.545	1.540
58°	0.848	0.530	1.600
59°	0.857	0.515	1.664
60°	0.866	0.500	1.732
61°	0.875	0.485	1.804
62°	0.883	0.469	1.881
63°	0.891	0.454	1.963
64°	0.899	0.438	2.050
65°	0.906	0.423	2.144
66°	0.913	0.407	2.246
67°	0.920	0.391	2.356
68°	0.927	0.375	2.475
69°	0.934	0.358	2.605
70°	0.940	0.342	2.748
71°	0.946	0.326	2.904
72°	0.951	0.309	3.078
73°	0.956	0.292	3.271
74°	0.961	0.276	3.487
75°	0.966	0.259	3.732
76°	0.970	0.242	4.011
77°	0.974	0.225	4.332
78°	0.978	0.208	4.705
79°	0.982	0.191	5.145
80°	0.985	0.174	5.671
81°	0.988	0.156	6.314
82°	0.990	0.139	7.115
83°	0.993	0.122	8.144
84°	0.995	0.104	9.514
85°	0.996	0.087	11.430
86°	0.998	0.070	14.301
87°	0.999	0.052	19.081
88°	0.999	0.035	28.636
89°	1.000	0.018	57.290
90°	1.000	0.000	Infinito

Fonte: https://escolaeducacao.com.br/tabela-trigonometrica/. Acesso em: 20 mai. 2022.

Feito isso, vamos construir a seguinte tabela dos ângulos notáveis:

Tabela 1: Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis.

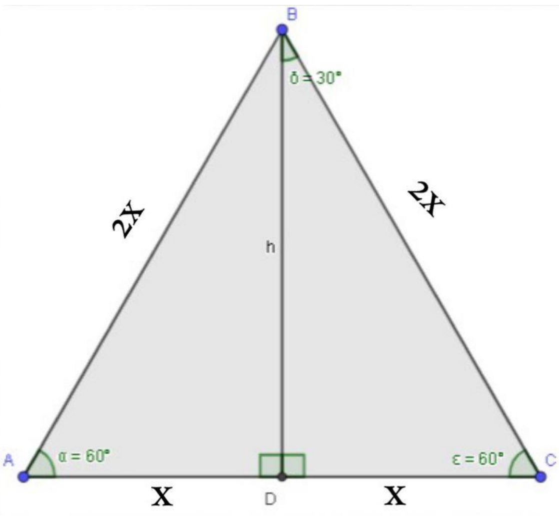
α	**30°**	**45°**	**60°**
$\boldsymbol{SEN}\ \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\boldsymbol{COS}\ \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\boldsymbol{TAN}\ \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Próprios autores.

Será explicado que esses três ângulos recebem esse nome pelo motivo de serem usados muito frequentemente na trigonometria do triangulo retângulo. Além disso, vamos falar que os valores dos ângulos notáveis podem ser descobertos por meio de um triângulo equilátero, ou seja, um polígono com todos os lados iguais e ângulos que somam 180°.

Seja x um número real maior que zero e ABC um triângulo equilátero de lado $2x$, sendo h a bissetriz de $\hat{B}$.

Figura 9: Triângulo isósceles.



Fonte: Próprios autores.

Como em um triângulo equilátero todos os ângulos medem 60° e h é bissetriz, então h divide o ângulo de 60° em dois de 30°. Assim como temos um ângulo reto em $\widehat{D}$, BDC é triângulo retângulo e portando podemos usar as relações trigonométricas. Antes vamos descobrir a altura h, como se trata de um triângulo equilátero a altura será de

$$h = x\sqrt{3}.$$

Então, começaremos demonstrando para o caso do $sen\ \alpha = \frac{1}{2}$, como

$$sen\ \propto = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

Então temos que

$$sen\ 30° = \frac{x}{2x}$$

$$sen\ 30° = \frac{1}{2}.$$

Agora para calcular o cosseno de 30°, temos que

$$\cos 30° = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

$$\cos 30° = \frac{x\sqrt{3}}{2x}$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Agora para o ângulo de 60°, o seno será:

$$sen\ 60° = \frac{x\sqrt{3}}{2x}$$

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

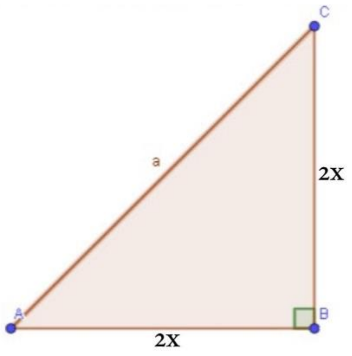
E o cosseno

$$\cos 60° = \frac{x}{2x}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

Para os ângulos de 45°, o segredo é considerar um quadrado de lado $2x$ e traçar uma diagonal a desse quadrado, obtendo assim o seguinte triângulo retângulo:

Figura 10: Triângulo com as medidas fornecidas.



Fonte: Próprios autores.

Como ABC é um triângulo retângulo, então por Pitágoras

$$a^2 = (2x)^2 + (2x)^2$$

$$a^2 = 8x^2$$

$$a = 2x\sqrt{2}$$

Agora que sabemos a medida da hipotenusa, resta calcular o seno e o cosseno de 45°:

$$sen\ 45° = \frac{2x}{2x\sqrt{2}}$$

$$sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

E ainda,

$$cos\ 45° = \frac{2x}{2x\sqrt{2}}$$

$$cos\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Agora para calcular a tangente de cada Ângulo basta dividir o seno pelo cosseno desse respectivo ângulo:

$$tg\ 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$tg\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para 45°,

$$tg\ 45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

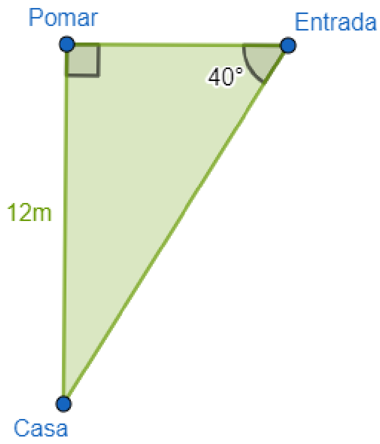
E por fim,

$$tg\ 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Antes dos exercícios, comentar com os alunos que geralmente as questões de ENEM que envolvem as relações trigonométricas no triângulo retângulo também envolvem outros conceitos matemáticos.

Exercício 2: Na figura a seguir estão posicionados a casa, o pomar e entrada da propriedade de Márcia.

Figura 11: Triângulo retângulo representando a casa, o pomar e entrada da propriedade de Márcia.



Fonte: Próprios autores.

Sabendo que a distância entre a casa e o pomar é igual a $12m$, determine a distância aproximada entre a casa e a entrada.

Resposta: Vamos denominar as distâncias como PE sendo a distância entre o pomar e a entrada, CA a distância entre a casa e o pomar e como CE a distância entre a casa e a entrada. Como sabemos que o ângulo formado entre os segmentos CE e PE é igual a $40°$ e que o cateto oposto a esse ângulo é igual a 12 podemos calcular o valor de CE utilizando o seno do ângulo $40°$, ou seja,

$$sen\alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$\Longrightarrow sen\ 40° = \frac{12}{CE}$$

$$\Longrightarrow 0{,}643 = \frac{12}{CE}$$

$$\Longrightarrow 0{,}643 \cdot CE = 12$$

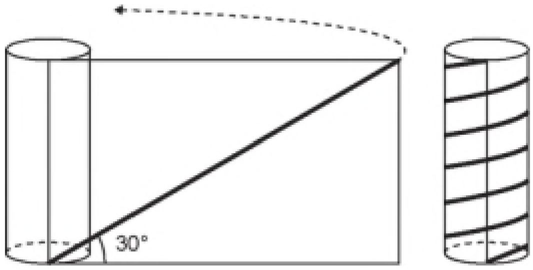
$$\Longrightarrow CE = \frac{12}{0{,}643}$$

$$\Longrightarrow CE = 18{,}66$$

Logo, a distância entre a casa e a entrada é aproximadamente $18{,}66m$.

Exercício 3: (ENEM, 2018) Para decorar um cilindro circular reto será usada uma faixa retangular de papel transparente, na qual está desenhada em negrito uma diagonal que forma 30° com a borda inferior. O raio da base do cilindro mede 6/π cm, e ao n enrolar a faixa obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura.

Figura 12: Representação cilindros.



Fonte: https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/disciplinas/matematica-matematica/relacoes-trigonometricas-no-triangulo-retangulo-leis-dos-senos-e-cossenos/questoes. Acesso em: 17 mai. 2022.

O valor da medida da altura do cilindro, em centímetro, é

A) $36\sqrt{3}$

B) $24\sqrt{3}$

C) $4\sqrt{3}$

D) 36

E) 72

R: Note que a diagonal em negrito forma dois triângulos retângulos, considere o triangulo retângulo abaixo da diagonal o qual possui demarcado o ângulo de 30°. O cateto adjacente AD tem a medida da circunferência da base do cilindro multiplicada por 6 pois a diagonal faz seis voltas completas em volta do cilindro, portanto como o raio é $\frac{6}{\pi}$ cm, logo o cateto adjacente ao ângulo de 30° mede:

$$AD = 6 \times 2\pi \frac{6}{\pi}$$

$$AD = 72 \text{ cm}$$

Agora como queremos descobrir a altura do cilindro, perceba que a altura tem a mesma medida do cateto oposto OP a esse mesmo ângulo de 30°. Portanto temos a medida do ângulo, do cateto adjacente e queremos a medida do cateto oposto, assim, usando as relações trigonométricas para descobrir:

$$Tan\ 30° = \frac{OP}{72}$$

$$72 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = OP$$

$$24\sqrt{3} = OP$$

Logo, a altura do cilindro é de $24\sqrt{3}$ cm. Alternativa B.

Exercício 4: (ENEM - 2013) As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de

15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

Figura 13: Torres Puerta.

Fonte: https://vestibular.mundoeducacao.uol.com.br/enem/seno-cosseno-tangente-no-enem.htm. Acesso em: 20 mai. 2022.

Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço:

a) Menor que 100 m^2.
b) Entre 100 m^2 e 300 m^2.
c) Entre 300 m^2 e 500 m^2.
d) Entre 500 m^2 e 700 m^2.
e) Maior que 700 m^2.

R: O ângulo que a altura forma com a aresta do prisma (prédio) é 15°. Podemos formar um triângulo com a altura, a aresta e a base, como na Figura 6. A base é o cateto oposto e a altura o cateto adjacente ao ângulo 15°.

Figura 14: Inclinação da torre.

Figura 15: Inclinação da torre.
Fonte: Adaptado de: https://vestibular.mundoeducacao.uol.com.br/enem/seno-cosseno-tangente-no-enem.htm.
Acesso em: 20 mai. 2022.

Sabemos que a altura é 114 m, e a tangente de 15° é aproximadamente 0,26. Então podemos determinar a medida do lado da base a partir da tangente.

$$tg\ 15° = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

$$0{,}26 = \frac{x}{114}$$

$$0{,}26 \times 114 = x$$

$$29{,}64 = x$$

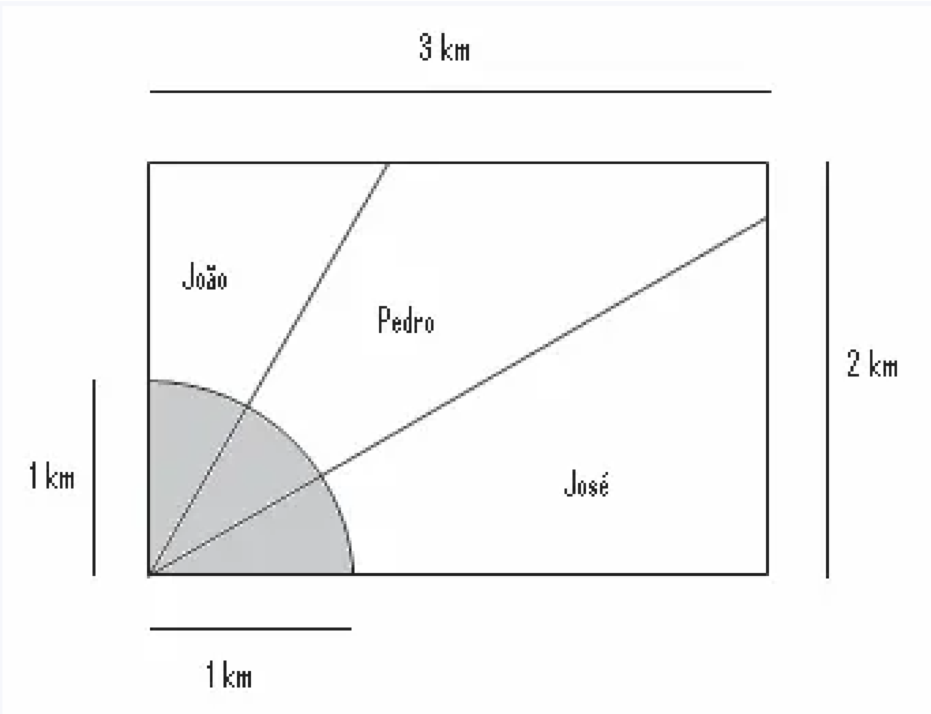
Como o enunciado diz que a base é quadrada então calculando sua área temos

$$A = 29{,}64^2 = 29{,}64 \times 29{,}64 = 878{,}53.$$

Logo, a resposta correta é a letra e).

Exercício 5: (ENEM – 2009) Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km x 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.

Figura 16: Terreno retangular de 3 km x 2 km.



Fonte: https://vestibular.mundoeducacao.uol.com.br/enem/seno-cosseno-tangente-no-enem.htm. Acesso em: 20 mai. 2022.

Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a (considere $\sqrt{3}/3 = 0{,}58$)

a) 50%.
b) 43%
c) 37%
d) 33%
e) 19%

R: Primeiro devemos observar que os lados do terreno formam um ângulo de 90°. Como cada um ficou com a terça parte da área de extração, a área foi dividida em três partes iguais, como consequência o ângulo de 90° também foi dividido em três ângulos de 30°.

A área do terreno de João é a área de um triângulo $A = \frac{b \times h}{2}$. Observando a figura percebemos que a altura é 2 Km, precisamos encontrar a base do triângulo. Vejamos que a base do triângulo é o cateto oposto ao ângulo de 30° formado pela divisão do terreno de João. E a altura é o cateto adjacente a este ângulo.

Logo, para descobrir a medida da base (cateto oposto) vamos utilizar a relação trigonométrica da tangente.

$$tg\ 30° = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

$$0{,}58 = \frac{cateto\ opsto}{2}$$

$$1{,}16 = cateto\ oposto$$

Agora podemos calcular a área do terreno.

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

$$A = \frac{1{,}16 \times 2}{2} = \frac{2{,}32}{2} = 1{,}16.$$

A área total do terreno é a área de um retângulo, $A = b \times h$.

$$A = 2 \times 3 = 6\ Km^2.$$

A porcentagem do terreno de João é $\frac{1{,}16}{6} = 0{,}193$ ou $19{,}3\%$. Letra e).

Referências

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante Matemática 3.** São Paulo: Edições SM, 2016.

MODERNA, E. **Conexões com a matemática.** 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013.

UM caminho para o curral. (10 min). Publicado pelo canal M3 Matemática Multimídia. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=t1yxIlaraQg&t=5s. Acesso em: 18 mai. 2022.

ÂNGULOS NOTÁVEIS. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/angulos-notaveis. Acesso em: 19 mai. 2022.

SENO, cosseno e tangente no ENEM. Disponível em: https://vestibular.mundoeducacao.uol.com.br/enem/seno-cosseno-tangente-no-enem.htm. Acesso em: 20 mai. 2022.

Tabela trigonométrica. Disponível em: https://escolaeducacao.com.br/tabela-trigonometrica/. Acesso em: 20 mai. 2022.

2.3.2 Relatório encontro 1

Relatório 1 – PROMAT

No dia 21 de maio realizamos o primeiro encontro do segundo semestre do PROMAT. Neste dia estavam presentes 16 alunos. Iniciamos com uma dinâmica de apresentação. Para isso, fizemos um círculo com os alunos e jogamos a bola para um deles, então o aluno fazia sua apresentação dizendo o nome, cidade em que morava e curso que pretendia cursar e em seguida jogava a bola para outro aluno, prosseguindo dessa forma até todos se apresentarem, inclusive nós.

Após a dinâmica todos sentaram e iniciamos a aula com o conteúdo de relações trigonométricas no triangulo retângulo. Nos slides, retomamos as classificações dos triângulos em relação aos ângulos e as medidas dos lados. Logo depois, propomos que resolvessem um problema no qual pedia a altura de um poste antes de ser quebrado por um carro. Rapidamente um dos alunos percebeu que poderia usar o teorema de Pitágoras pois a parte quebrada, a parte em pé e a distância entre as duas, formavam um triangulo retângulo. Então o problema foi feito no quadro e formalizamos o teorema de Pitágoras.

Em seguida, passamos o vídeo “Um caminho para o curral”. No problema que o vídeo apresentava um fazendeiro precisava encontrar um novo caminho até o curral para alimentar seus animais. Este novo caminho passava por um milharal e formava um triangulo retângulo com duas estradas que formava o antigo caminho, essas estradas eram os dois catetos do triângulo, uma com medida de 3,5 Km e a outra com 2 Km. Com isso, pausamos o vídeo e deixamos um tempo para que os alunos descobrissem qual seria a nova distância que o fazendeiro iria percorrer. As respostas que os alunos chegaram eram 4,03 Km e 4,5 Km, para chegar nesses resultados eles utilizaram o teorema de Pitágoras com as duas medidas dos catetos conhecidos.

Então prosseguimos com o vídeo, sabendo a distância que iria percorrer, o fazendeiro precisava saber a direção que ia entrar no milharal. A solução agora era determinar a inclinação para entrar no milharal e manter-se em linha reta por aproximadamente 4 Km. Alguns alunos perceberam que podiam calcular o seno ou cosseno pois conheciam a medida do cateto oposto, do cateto adjacente e a hipotenusa.

Depois do vídeo, formalizamos as relações no triângulo retângulo e fizemos um exemplo no quadro. Em seguida, comentamos que existiam alguns ângulos que geralmente são mais utilizados em situações problemas e são conhecidos como ângulos notáveis, são eles 30°, 45° e 60°. Fizemos a dedução do seno, cosseno e tangente do ângulo de 30° a partir de um triangulo retângulo e para os outros apenas preenchemos a tabela.

Depois do intervalo propomos alguns exercícios para que resolvessem. Para a resolução dos problemas pedimos para que os alunos se dividissem em grupos, porém, como era o primeiro dia e não se conheciam, eles ficaram com receio de se dividirem, então separamos a sala em grupos de quatro pessoas.

Durante as resoluções, passamos nos grupos explicando os exercícios e tirando dúvidas. Dois exercícios ficaram como lista. Em geral, os alunos se mantiveram quietos durante toda a aula. Respondiam conforme o que era pedido e não se dispersavam em conversas paralelas.

2.4 Módulo/encontro 2 –

2.4.1 Plano de aula

PLANO DE AULA

Conteúdo: Trigonometria.

Público-Alvo: Alunos egressos da Rede Pública de Ensino CASCAVEL, inscritos no projeto.

Objetivo geral: Introduzir os conceitos de ciclo trigonométrico, funções trigonométricas e arcos.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com trigonometria, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Diferenciar medida angular de um arco com o comprimento deste arco;
- Converter as unidades de medidas de grau para radiano e vice-versa;
- Identificar seno, cosseno e tangente de um ângulo no ciclo trigonométrico.

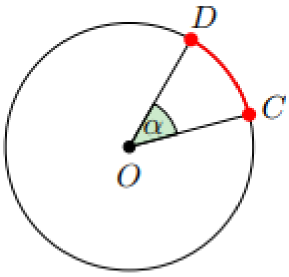
Tempo de execução: Um encontro de 4 horas.

Recursos didáticos: Quadro negro, giz, PowerPoint,

Encaminhamento metodológico: Antes de trabalharmos o círculo trigonométrico precisamos retomar alguns conceitos como arco, comprimento de arco, conversão de graus para radianos.

> Dado um círculo e dois pontos C e D sobre ele, um conjunto de pontos sobre o círculo que forma a curva que vai de um dos pontos ao outro é chamado de **arco**. Denotamos $\widehat{CD}$ o arco determinado pelos pontos C e D.

Figura 17: Arco.



Fonte: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/4fdrvag60cg0k.pdf. Acesso: 25 mai. 2022.

Podemos observar que dois pontos determinam dois arcos diferentes, os pontos C e D determinam os arcos $\widehat{CD}$ e $\widehat{DC}$.

Todo arco possui um ângulo central formado pelos segmentos que ligam o centro da circunferência aos pontos que determinam o arco. Como podemos observar na Figura 1 o ângulo central do arco $\widehat{CD}$ é α.

Quando queremos medir um arco, podemos fazer isso de duas maneiras. A primeira é determinar o comprimento do arco, e a segunda a medida do ângulo central.

O **comprimento** de um arco $\widehat{CD}$ é o comprimento da curva que vai de C até D.

Se $\widehat{CD}$ é um arco de um círculo de raio r, cujo ângulo central mede α **radianos**, então o comprimento deste arco é $C_{arco} = r\alpha$.

Se o ângulo central for dado em **graus** temos

$$C_{arco} = \pi r \frac{\alpha}{180°}$$

Resolver no quadro o seguinte exemplo.

Exemplo 1:

a) Determine o comprimento de um arco com ângulo central de 30° contido em uma circunferência de raio 1.

b) Determine o comprimento de um arco com ângulo central de $\frac{\pi}{6}$.

Resolução:

a)

$$\boldsymbol{C_{arco} = \pi r}\frac{\alpha}{180°}$$

$$\boldsymbol{C_{arco}} = \boldsymbol{\pi 1}\frac{30°}{180°} = \pi\frac{1}{6} = \frac{\pi}{6} = 0{,}523$$

b)

$$C_{arco} = r\alpha$$

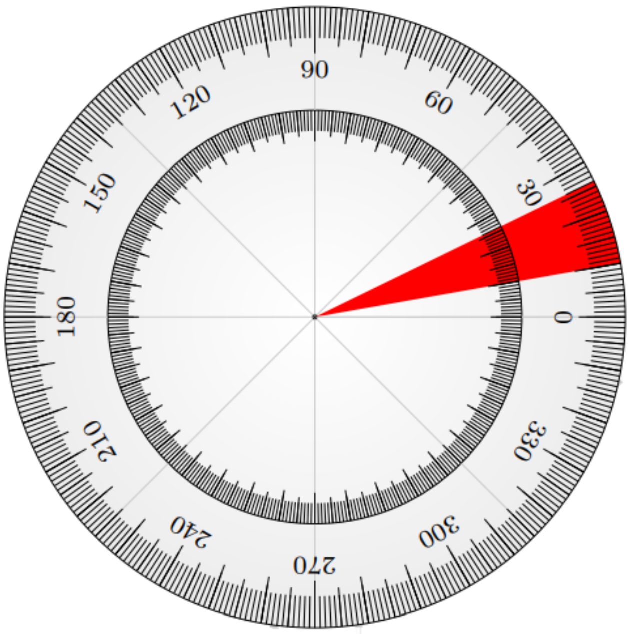
$$C_{arco} = 1\frac{\pi}{6} = 0{,}523$$

Após o exemplo explicar brevemente as unidades de medidas de graus e radianos.

Medidas em grau

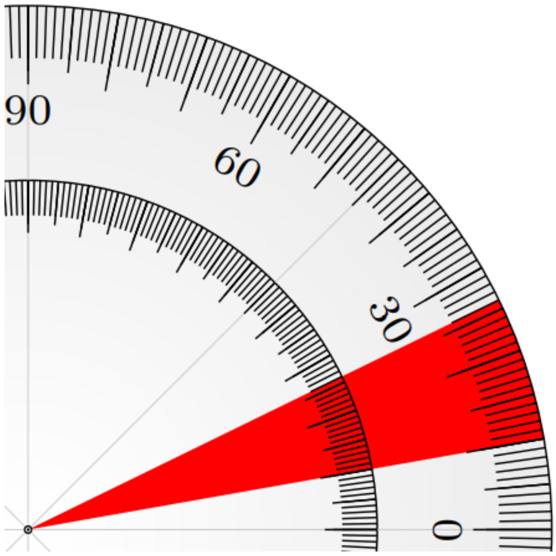
Quando falamos da unidade de medida em graus, significa que um círculo qualquer foi dividido em 360 arcos do mesmo comprimento. O ângulo 1° é o ângulo central de qualquer um desses arcos.

Figura 18: Círculo dividido em 360 arcos.



Fonte: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/4fdrvag60cg0k.pdf. Acesso: 25 mai. 2022.

Figura 19: 16 arcos de 1°.



Fonte: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/4fdrvag60cg0k.pdf. Acesso: 25 mai. 2022.

É importante lembrar que um ângulo de 180° corresponde a meia volta e ângulo de 90° corresponde a um quarto de uma volta. Mas porque é dividido em 360?

Isto é herança da civilização babilônica, que também nos deixou as unidades de medidas de tempo, como horas e minutos em 60. O número 360 possui muitos divisores inteiros, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360. Isto torna prático o uso da medida graus.

Porém, este número é arbitrário, existe uma medida em graus chamada "grado" que divide o círculo em 400 partes, utilizada na navegação, pois navegar um grado sobre o meridiano terrestre corresponde a navegar aproximadamente 100 Km. Mas como a Terra não é uma esfera perfeita, essa aproximação não é tão boa e como atualmente existem instrumentos mais precisos de navegação, esta medida caiu em desuso.

Medida em radiano

Para a explicação da medida em radiano vamos passar o vídeo "O que é um radiano? " disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=lwLSGdtP8y8&t=3s.

Um **radiano** é a medida do ângulo central de um arco cujo comprimento é igual ao raio do círculo. Abreviamos 1 radiano para 1 rad.

Conversão de graus para radianos

Exemplo 2: Transforme 150° para radianos.

Resolução:

Seja x a medida do ângulo em radianos que corresponde a 150°. Sabemos que π radianos equivalem a 180°. Como essas medidas são proporcionais temos,

$$\frac{x}{\pi} = \frac{150°}{180°}$$

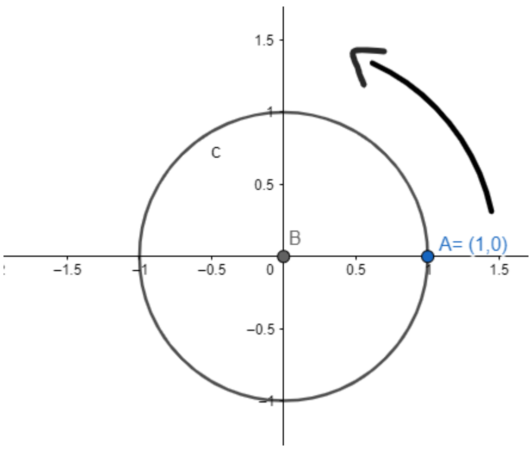
$$x = \frac{150}{180}\pi = \frac{5}{6}\pi$$

150° equivalem a $\frac{5}{6}\pi$ radianos.

Círculo trigonométrico

O círculo trigonométrico é um círculo unitário (raio igual 1) com centro no ponto $O = (0,0)$ na origem do plano cartesiano. O ponto $A = (1,0)$ é a origem de todos os arcos, ou seja, a partir desse ponto que começamos a percorrer o ciclo trigonométrico.

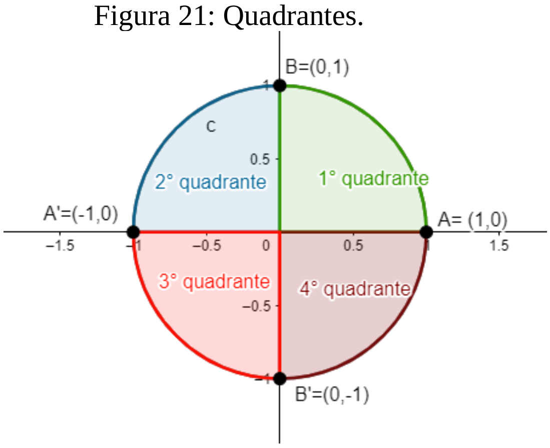
Figura 20: Sentido do ciclo trigonométrico.



Fonte: Próprios autores.

O eixo das abcissas (coordenadas em x no plano cartesiano) e o eixo das ordenadas (coordenadas em y no plano cartesiano) dividem o ciclo trigonométrico em quatro quadrantes.

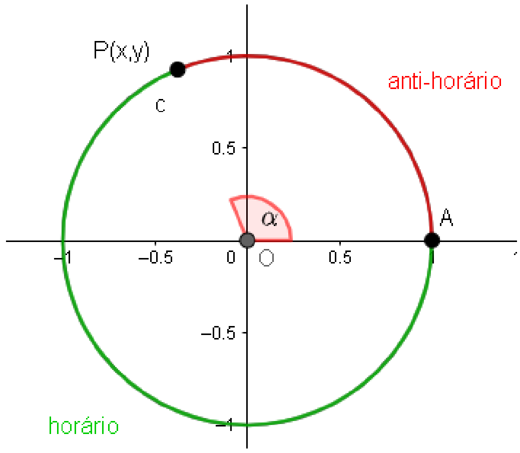
Figura 21: Quadrantes.



Fonte: Próprios autores.

A cada ponto $P(x, y)$ com cordenadas (x, y) no círculo trigonométrico podemos associar dois arcos que percorrem o círculo partindo do ponto A em direção a P, um no sentido anti-horário e outro no sentido horário.

Figura 22: Sentidos no círculo trigonométrico.



Fonte: Próprios autores.

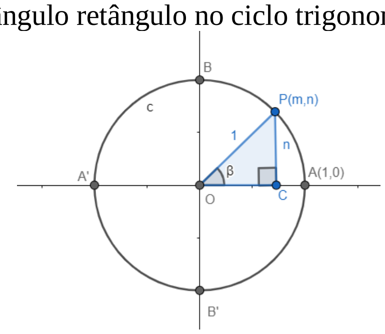
Para qualquer ponto P no círculo trigonométrico, como o círculo possui raio 1, então para qualquer arco $\widehat{AP}$ o comprimento é sempre igual a medida do ângulo central em radianos. Isso pode ser observado no exemplo 1, tanto para 30° ou $\frac{\pi}{6}$ radianos o comprimento do arco é $\frac{\pi}{6}$.

Podemos obter o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos usando o círculo trigonométrico.

Seno

Para introduzir o conceito de seno, será pedido aos alunos se eles conseguem obter o seno do ângulo β no seguinte triângulo:

Figura 23: Triângulo retângulo no ciclo trigonométrico.



Fonte: Próprios autores.

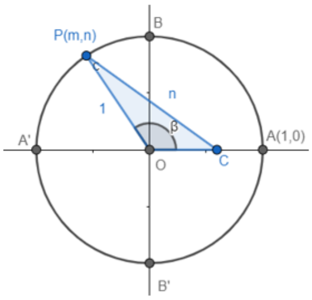
Será relembrado então que o seno de um ângulo em um triângulo retângulo é igual ao cateto oposto sobre a hipotenusa, e nesse caso:

$$sen(\beta) = \frac{CO}{H} = \frac{n}{1} = n$$

Em seguida será passada a definição de seno no ciclo trigonométrico:

Note que essa definição de $sen(\beta) = \frac{CO}{H}$ só é válida no primeiro quadrante quando $B \neq P \neq A$, caso contrário, β deixaria de ser um ângulo agudo e o triângulo não seria mais um triângulo retângulo:

Figura 24: Triângulo quando P está no segundo quadrante.

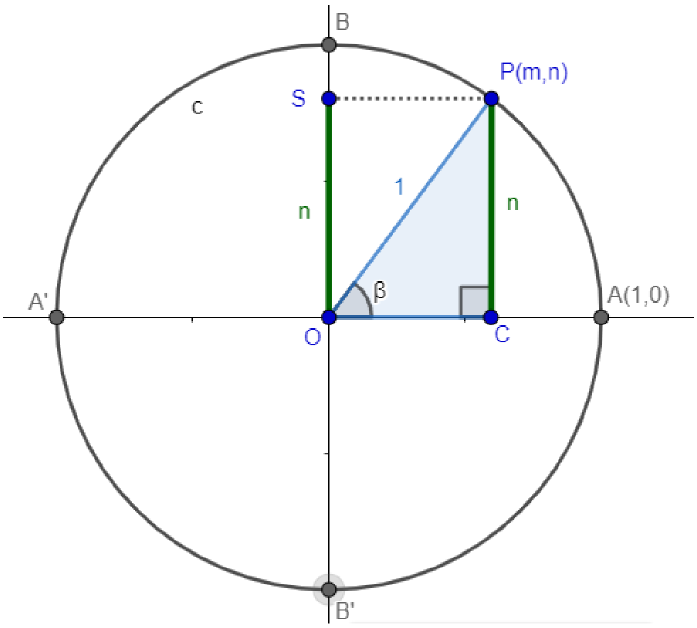


Fonte: Próprios autores.

Dessa forma, torna-se necessário definir essa função de uma outra forma.

Analisando o triângulo o qual foi calculado o valor de seno anteriormente, podemos observar que n corresponde ao valor da ordenada do ponto P:

Figura 25: Construção da definição de seno de um ângulo.



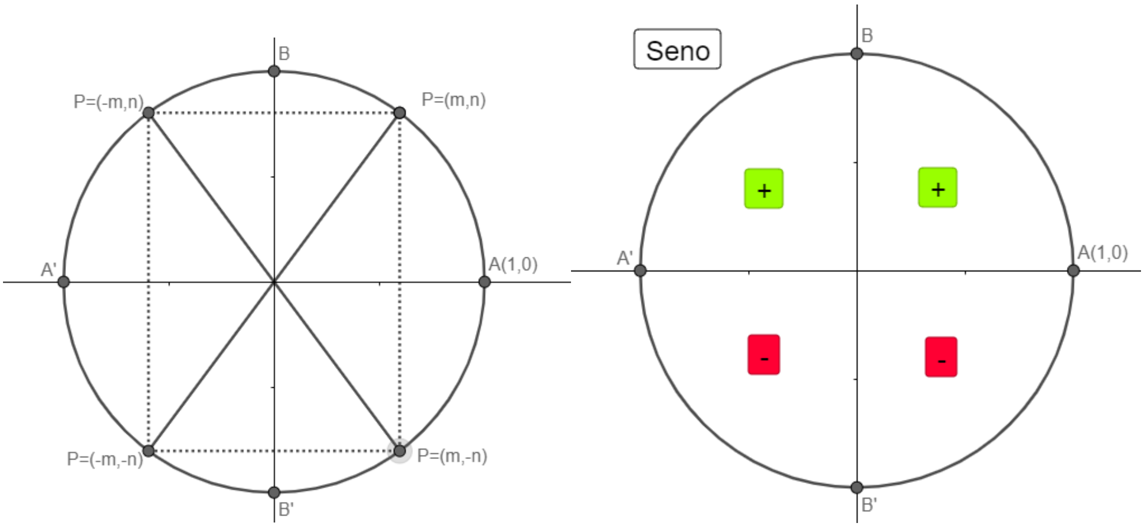
Fonte: Próprios autores.

Desse modo, podemos concluir que o seno de um ângulo no círculo trigonométrico é o valor da ordenada desse ângulo. Generalizando:

> Para todo arco $\widehat{AP}$ do ciclo trigonométrico, com medida de $\widehat{AP} = \alpha\ rad$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, temos: $sen(\alpha) = n$, tal que n é a ordenada de P.

Analisando a variação do valor do seno nos quadrantes, temos que se percorrermos o ponto P ao longo do ciclo trigonométrico teremos que o valor de seno será positivo nos dois primeiros quadrantes e negativo nos dois últimos. Isso se deve pelo fato de que o valor de seno é a ordenada de P.

Figura 26: Sinal do seno e pontos simétricos.

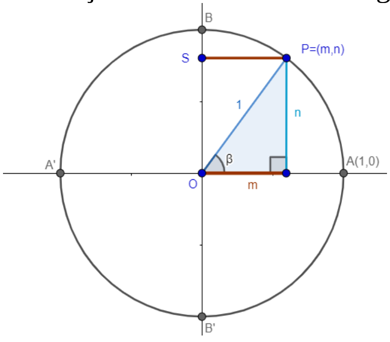


Fonte: Próprios autores.

Cosseno

De modo semelhante podemos encontrar o cosseno de um ângulo, ou seja, observando o triângulo retângulo formado no ciclo trigonométrico, podemos analisar que o valor do cosseno corresponde ao valor da abscissa do ponto P.

Figura 27: Construção do cosseno de um ângulo.



Fonte: Próprios autores.

Mais uma vez, se formos encontrar o valor do cosseno de β do triângulo retângulo formado, obteríamos:

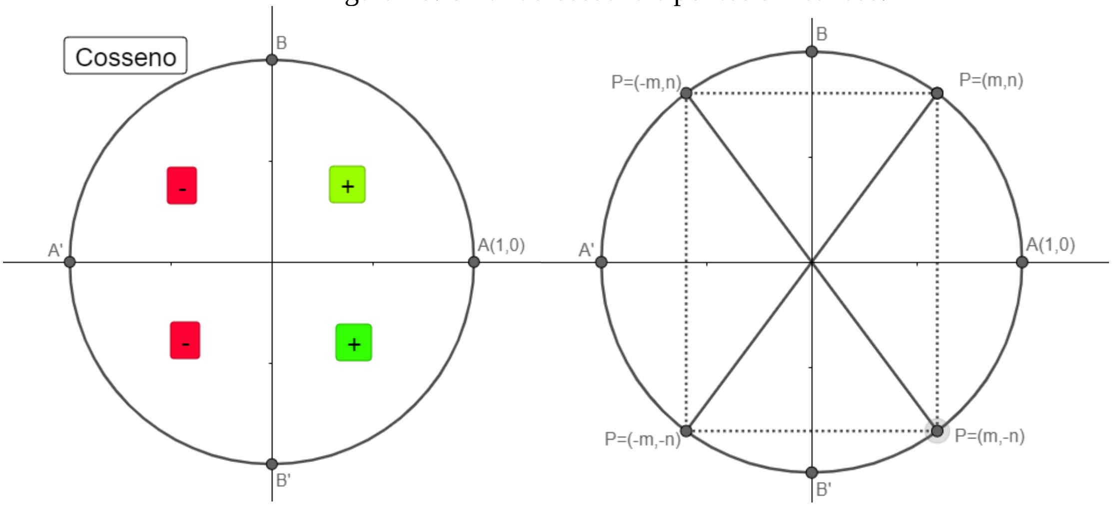
$$\cos(\beta) = \frac{CA}{H} = \frac{m}{1} = m$$

Porém, essa relação só é possível quando o ponto P está no primeiro quadrante e quando P é diferente de A e B. Caso contrário, o triângulo não seria mais um triângulo retângulo. Dessa forma, podemos generalizar o conceito de cosseno assim como foi feito para os valores de seno:

Para todo arco $\widehat{AP}$ do ciclo trigonométrico, com medida de $\widehat{AP} = \alpha\, rad$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, temos: $cos(\alpha) = m$, tal que m é a abscissa de P.

Analisando a variação do valor do cosseno nos quadrantes, temos que se percorrermos o ponto P ao longo do ciclo trigonométrico teremos que o valor do cosseno será positivo no primeiro e último quadrante e negativo no segundo e terceiro quadrante. Isso se deve pelo fato de que o valor do cosseno é a abscissa de P.

Figura 28: Sinal do cosseno e pontos simétricos.

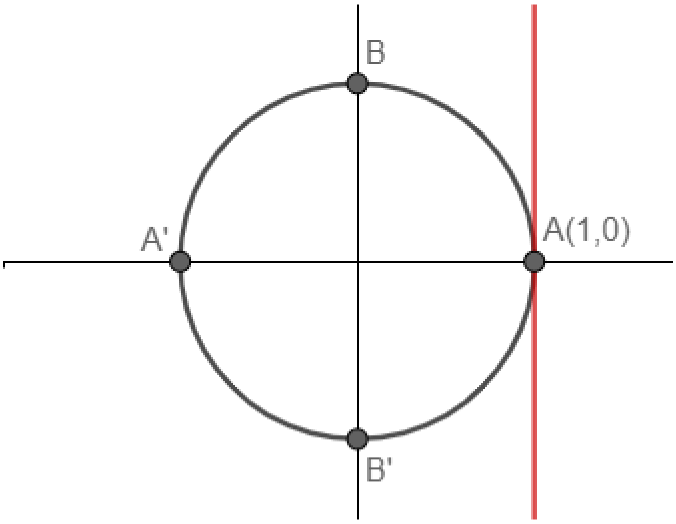


Fonte: próprios autores.

Tangente

Para definir a tangente, devemos traçar uma reta que tangencie o ciclo trigonométrico em apenas um ponto e que seja perpendicular ao eixo das abscissas e paralela ao eixo das ordenadas.

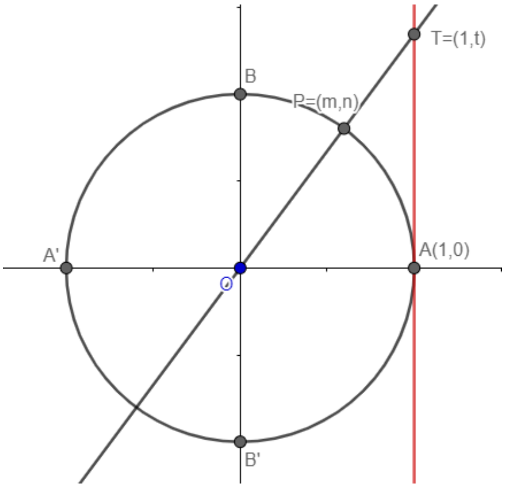
Figura 29: Reta tangente ao ciclo trigonométrico.



Fonte: Próprios autores.

Em seguida, ao tomar um ponto $P = (m, n)$ no ciclo trigonométrico e traçarmos uma reta que passa na origem e no ponto P, teremos que essa reta vai interceptar a reta tangente em um ponto $T = (1, t)$:

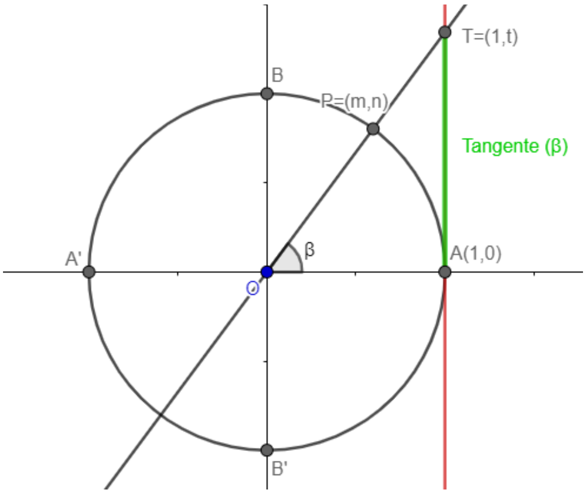
Figura 30: Reta que passa pelo centro do ciclo e corta a reta tangente.



Fonte: Próprios autores.

Nota-se que a abscissa de T sempre será 1, pois é uma reta perpendicular ao eixo das abscissas que passa pelo ponto $A = (1,0)$. Desse modo, a tangente é definida como a distância entre o ponto A e ponto T:

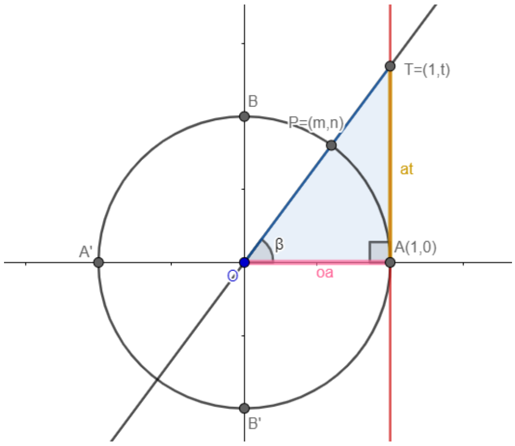
Figura 31: Marcação do ângulo entre a reta que corta o centro do ciclo e o eixo das abscissas.



Fonte: Próprios autores.

Analisando o triângulo retângulo formado, temos que a tangente do ângulo β é igual o cateto oposto sobre o cateto adjacente,

Figura 32: Construção da definição de tangente.



Fonte: Próprios autores.

Utilizando a fórmula da tangente:

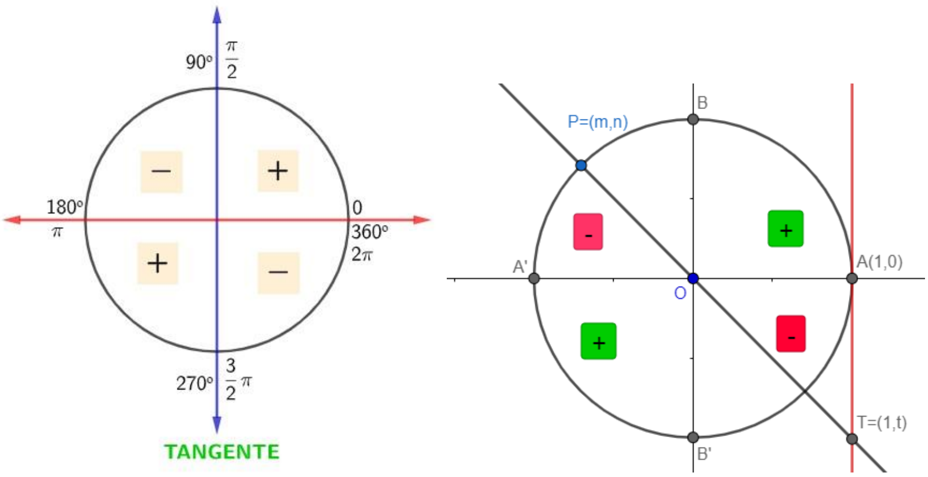
$$tg(\beta) = \frac{CO}{CA} = \frac{sen(\beta)}{\cos(\beta)} = \frac{t}{1} = t$$

Pode-se observar que o valor da tangente do ângulo é o valor da ordenada do ponto T, logo, podemos generalizar para um ponto qualquer:

> Para todo arco $\widehat{AP}$ do ciclo trigonométrico, com medida de $\widehat{AP} = \alpha\, rad$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, e $\frac{\pi}{2} \neq \alpha \neq \frac{3\pi}{2}$, temos: $tg(\alpha) = t$, tal que t é a ordenada de T, e T é a interseção da reta tangente ao ciclo trigonométrico a qual é perpendicular ao eixo das abscissas e paralela ao eixo das ordenadas.

Analisando a variação do valor da tangente nos quadrantes, temos que se percorrermos o ponto P ao longo do ciclo trigonométrico teremos que o valor da tangente cosseno será positivo no primeiro e terceiro quadrante e negativo no segundo e quarto quadrante. Isso se deve pelo fato de que ao percorrer o ciclo, a reta que passa pela origem e pelo ponto P corta a reta tangente no ponto T em valores negativos para a ordenada de T. Além disso, nos quadrantes em que os valores são negativos a abscissa e a ordenada possuem sinais opostos e como a tangente é a divisão da abscissa pela ordenada, o sinal da tangente será negativo. O oposto ocorre para quando ambos os sinais são positivos

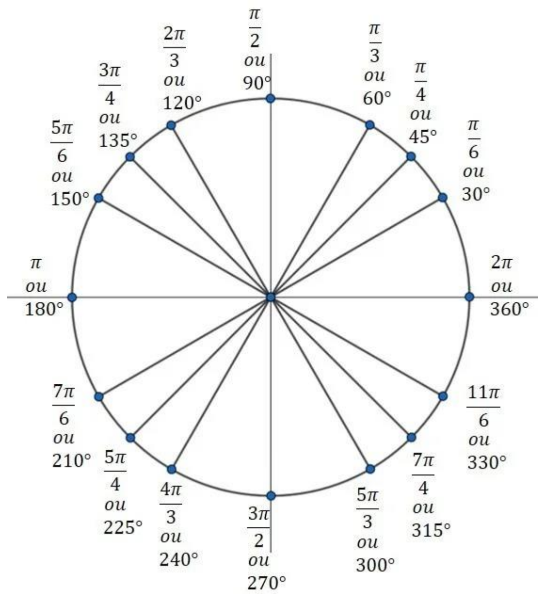
Figura 33: Sinal da tangente.



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/simetria-no-circulo-trigonometrico.htm

Feito isso, será apresentado o ciclo trigonométrico com os principais ângulos e seus simétricos:

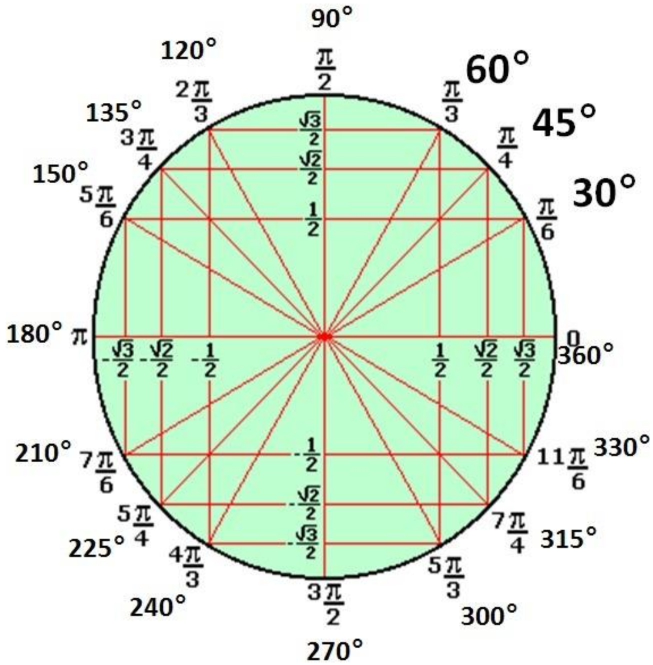
Figura 34: Valores dos ângulos em graus e em radianos.



Fonte: https://www.todamateria.com.br/funcoes-trigonometricas/.

Então, explicaremos com o auxílio também da imagem a seguir que o valor absoluto do seno, cosseno e tangente dos ângulos correspondentes continuam o mesmo, a única mudança que pode ocorrer é no sinal.

Figura 35: Pontos simétricos no ciclo trigonométrico.

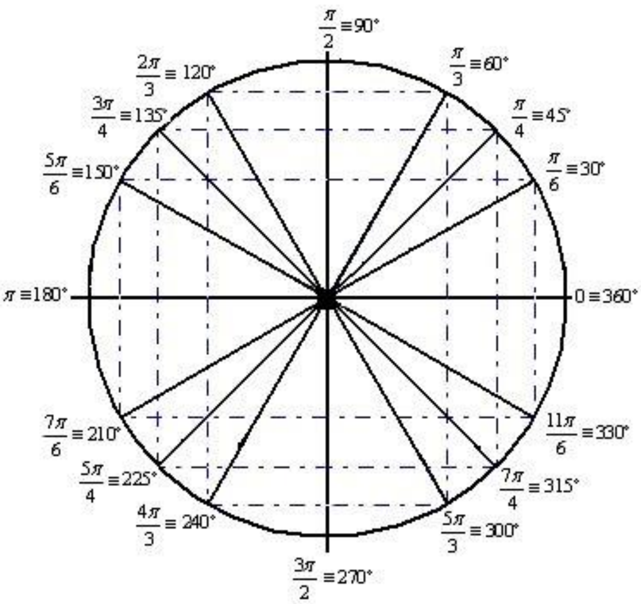


Fonte: https://www.passeidireto.com/arquivo/79524805/circulo-trigonometrico.

Para exemplificar, vamos calcular o $sen\ 120°$ e o $\cos 120°$.

Exemplo: Calcule o seno e cosseno do ângulo 120°.

Figura 36: Pontos simétricos para utilizar no exercício.



Fonte: https://www.todamateria.com.br/circulo-trigonometrico/

R: Como o seno é medido no eixo das ordenadas, note que 120° corresponde ao mesmo ponto que o ângulo de 60°. Como $sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, logo $sen\ 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ também, visto que ambos estão correspondendo no lado positivo do eixo das ordenadas.

Agora para o cosseno, note que no eixo das abcissas, $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

Exercícios:

1- Analise o círculo trigonométrico e a partir dos ângulos notáveis descubra:

a) Sen 135°
b) Cos 135°
c) Cos 150°
d) Sen 210°
e) Cos 210°
f) Tan 225°

R: alternativa a) O sinal será o mesmo, pois está no eixo positivo das ordenadas, e terá o mesmo valor que $sen\ 45°$,

$$sen\ 135° = +\,sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

alternativa b) O sinal será negativo, pois está no eixo negativo das abcissas, logo terá o mesmo valor que $-cos\ 45°$,

$$\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

alternativa c) O sinal será negativo, pois está no eixo negativo das abcissas, logo terá o mesmo valor que $-cos\ 30°$,

$$\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

alternativa d) O sinal será negativo, pois está no eixo negativo das ordenadas, logo terá o mesmo valor que $-\,sen\ 30° = -\frac{1}{2}$

alternativa e) O sinal será negativo, pois está no eixo negativo das abcissas, logo terá o mesmo valor que $-\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

alternativa f) Terá o mesmo sinal e valor de $\tan 45°$, logo

$$\tan 225° = \tan 45° = 1$$

1) (ENEM 2018) A rosa dos ventos é uma figura que representa oito sentidos, que dividem o círculo em partes iguais.

Figura 37: Rosa dos ventos.

Fonte: https://blogdoenem.com.br/ciclo-trigonometrico/.

Uma câmera de vigilância está fixada no teto de um *shopping* e sua lente pode ser direcionada remotamente, através de um controlador, para qualquer sentido. A lente da câmera está apontada inicialmente no sentido Oeste e o seu controlador efetua três mudanças consecutivas, a saber:

1ª mudança: 135º no sentido anti-horário;

2ª mudança: 60º no sentido horário;

3ª mudança: 45º no sentido anti-horário.

Após a 3ª mudança, ele é orientado a reposicionar a câmera, com a menor amplitude possível, no sentido Noroeste (*NO*) devido a um movimento suspeito de um cliente.

Qual mudança de sentido o controlador deve efetuar para reposicionar a câmera?

a) 75º no sentido horário.

b) 105º no sentido anti-horário.

c) 120º no sentido anti-horário.

d) 135º no sentido anti-horário.

e) 165º no sentido horário.

R: Podemos fazer uma equivalência entre a rosa dos ventos com o ciclo trigonométrico, assim, L=0°, N=90°, O=180° e S=270°, ainda temos NE=45°, NO=135°, SO=225° e SE=315°. A lente da câmera está apontada para o sentido Oeste, ou seja, está em 180°. A primeira mudança parte de 180°, percorrendo 135° no sentido anti-horário, isso significa que devemos somar 135° aos 180°.

$$180° + 135° = 315°$$

Agora, a segunda mudança foi de 60°, mas dessa vez no sentido horário, com isso vamos diminuir esse valor dos 315°.

$$315° - 60° = 255°$$

A terceira mudança foi, 45º no sentido anti-horário, logo somamos esse valor as 255° encontrados.

$$255° + 45° = 300°$$

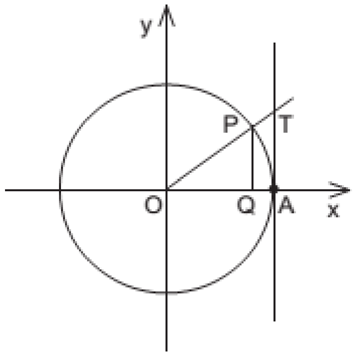
Quando se reposiciona a câmera no Noroeste (NO), ela sai do 300° e para no 135°. Como 300° está entre S (270°) e SE (315°), logo a câmera realizou x° no sentido horário, sendo

$$x° = 300° - 135° = 165°.$$

Alternativa E).

2) (FATEC-2011) No sistema cartesiano ortogonal xOy, considere a circunferência de centro O e pontos A (2; 0) e Q ($\sqrt{3}$; 0). Sabendo-se que P é um ponto dessa circunferência e que a reta $\overleftrightarrow{AT}$ é tangente à circunferência no ponto A, tal que $\overleftrightarrow{AT}$ é paralela a $\overleftrightarrow{PQ}$, então a medida do segmento $\overline{AT}$ é

Figura 38: Ciclo com uma reta tangente a ele e uma reta cortando o centro do ciclo e a reta tangente.



Fonte: https://www.qconcursos.com/questoes-de-vestibular/questoes/79070fd7-e1.

(A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(B) $\sqrt{3}$

(C) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

(D) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

(E) $2\sqrt{3}$

R: A partir das ordenada do ponto A percebemos que o raio da circunferência é 2, ou seja, o dobro do círculo unitário. E essa é a informação chave para resolver o exercício, é pensando nisso que chegaremos na resposta. Com essa ideia, sendo α o ângulo equivalente ao arco AP, do ponto Q temos que o $\cos\alpha$ mede $\sqrt{3}$, mas como estamos com o dobro do círculo trigonométrico unitário, logo

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dos ângulos notáveis

$$\alpha = 30°$$

basta descobrir a medida da tangente de 30° no círculo unitário e multiplicar por 2, logo

$$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{AT} = 2 \times \tan 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Alternativa A).

3) Um candidato procurou a coordenação do Curso de Matemática para saber do uso desta disciplina nas diversas áreas de conhecimento. Foi-lhe dito que vários problemas são resolvidos com conhecimentos de Matemática do Ensino Médio, tais como os apresentados a seguir.

Uma formiga percorre uma circunferência trigonométrica partindo de sua origem. Ela para no ponto P(x, 1/5) do primeiro quadrante. O cosseno do arco percorrido pela formiga é:

a) $\frac{\sqrt{24}}{5}$

b) $\frac{\sqrt{26}}{5}$

c) $\frac{24}{5}$

d)$\frac{4}{5}$

e) $\frac{2}{5}$

R: Como é uma circunferência trigonométrica, logo o raio é 1. Sendo assim, sabendo que o ângulo está no primeiro quadrante, ao construir o triângulo retângulo referente ao ponto P na circunferência, a hipotenusa terá a medida do raio, ou seja, 1. O cateto oposto terá a medida $\frac{1}{5}$ e o cateto adjacente terá a medida do cosseno do arco percorrido pela formiga. De Pitágoras,

$$1^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + x^2$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{24}}{5}$$

Alternativa a).

Referências

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante Matemática 3.** São Paulo: Edições SM, 2016.

MODERNA, E. **Conexões com a matemática.** 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013.

BENEVIDES, F. S. **Material Teórico - Módulo Trigonometria I**: Sistema de Unidade de Medida de Ângulos. Portal da Matemática OBMEP. Disponível em: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/4fdrvag60cg0k.pdf. Acesso em: 24 mai. 2022.

O que é um radiano?. (3 min). Publicado pelo canal Estude Matemática. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=lwLSGdtP8y8&t=3s. Acesso em: 25 mai. 2022.

QUESTÕES de concursos. **Qconcursos**. Disponível em: https://www.qconcursos.com/questoes-de-vestibular/questoes/79070fd7-e1. Acesso em: 24 mai. 2022.

ECCHER, J. Ciclo Trigonométrico: relações trigonométricas na circunferência. **blog do enem**, 2016. Disponível em: https://blogdoenem.com.br/ciclo-trigonometrico/. Acesso em: 24 mai. 2022.

GOUVEIA, R. Círculo trigonométrico. **toda matéria**. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/circulo-trigonometrico/. Acesso em: 24 mai. 2022.

Círculo trigonométrico. **Passei Direto**. Disponível em: https://www.passeidireto.com/arquivo/79524805/circulo-trigonometrico. Acesso em: 24 mai. 2022.

ASTH, R. Funções trigonométricas. **toda matéria**. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/funcoes-trigonometricas/. Acesso em: 24 mai. 2022.

QUESTÕES de concursos. **Qconcursos**. Disponível em: qconcursos.com/questoes-de-vestibular/questoes/3b7ea599-3f. Acesso em: 24 mai. 2022.

2.4.2 Relatório encontro 2

No dia 27 de maio realizamos o segundo encontro do segundo semestre do PROMAT. Neste dia estavam presentes 15 alunos. Iniciamos corrigindo dois exercícios da aula passada.

O primeiro exercício falava sobre as Torres Puerta da Europa, que são duas torres inclinadas uma sobre a outra e possuem inclinação de 15° com a vertical e uma altura de 114 m. Também dizia que estas torres são um exemplo de prisma oblíquo de base quadrada. Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° o exercício pedia se a área da base da torre ocupava um espaço: menor que 100 m^2, entre 100 m^2 e 300 m^2, entre 300 m^2 e 500 m^2, entre 500 m^2 e 700 m^2 ou maior que 700 m^2. Fizemos a leitura e pedimos se alguém havia resolvido, apenas um aluno respondeu que sim. Então corrigimos o exercício no quadro conforme planejado.

O segundo exercício dizia que ao morrer o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km x 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Os irmãos acordaram em dividir o terreno de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração de outro. Em relação à partilha proposta, o exercício pedia qual a porcentagem da área do terreno que coube a João. Após a leitura fizemos a correção conforme descrita no plano de aula. Um dos alunos questionou o porquê estávamos dividindo a área do terreno de João pela área total, $\frac{1{,}16}{6}$, explicamos que isso era para descobrir a porcentagem de área que o terreno de João representava em relação a área total. Também fizemos a conta da divisão no quadro.

Em seguida, começamos a retomar alguns conceitos como arco, comprimento de arco e conversão de graus para radianos. Nos slides passamos a definição de arco em um círculo qualquer, mostramos uma imagem para ilustrar, depois falamos sobre algumas propriedades dos arcos. Comentamos sobre duas medidas em um arco, a primeira era o comprimento e a segunda o ângulo central. Mostramos duas fórmulas, uma para calcular o comprimento de um arco conhecendo o raio do círculo em que ele estava contido e o ângulo central em radianos e a outra conhecendo também o raio e o ângulo central em graus. Como exemplo, determinamos o comprimento de um arco com ângulo central de 30° contido em uma circunferência de raio 1, e depois, nesta mesma circunferência determinamos o comprimento de um arco com ângulo central de $\frac{\pi}{6}$. Chegamos no mesmo comprimento pois 30° graus correspondem a $\frac{\pi}{6}$ radianos. Durante as explicações os alunos se mantinham em silêncio e prestando a atenção.

Após isso, falamos sobre as unidades de medidas em graus e radianos do ângulo central. Explicamos que, quando estamos falando em graus, significa que um círculo qualquer foi dividido em 360 arcos do mesmo comprimento. O número 360 torna seu uso prático pela quantidade de divisores que possui, isto também é herança da civilização babilônica que também deixou as medidas de tempo na base 60. Também existiu uma medida em graus chamada “grado” que consistia na divisão do círculo em 400 partes. O grado era utilizado na navegação, mas caiu em desuso com os novos instrumentos atuais que são mais precisos.

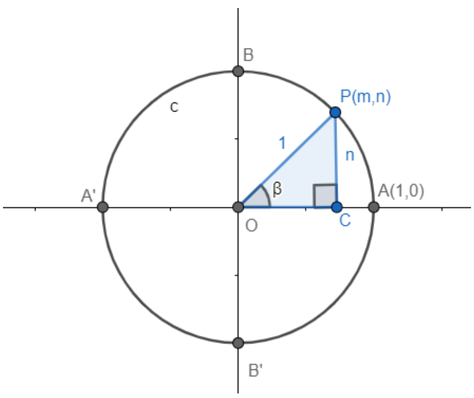
Para explicar o radiano, passamos um vídeo no YouTube. No vídeo mostrava uma circunferência de raio R, então a medida do raio “entortava” até adquirir a curvatura do círculo. Então era determinado um arco de comprimento R, e em torno da circunferência poderíamos determinar 6,28 arcos com a medida do raio. Um arco que mede o mesmo que o raio, mede 1 radiano e o ângulo central deste arco é dito ângulo de 1 radiano. Além disso, no vídeo mostrava que na circunferência cabem aproximadamente 3,14 diâmetros. Depois da explicação fizemos um exemplo de conversão de 150° graus para radianos. Foi pedido se os alunos tinham alguma dúvida e eles responderam que não.

Logo depois, começamos a falar sobre o círculo trigonométrico. Explicamos que o círculo trigonométrico é um círculo unitário com centro no ponto $O = (0{,}0)$ no plano cartesiano, o ponto $A = (1{,}0)$ é a origem de todos os arcos. O eixo das abcissas e o eixo das ordenadas dividem o círculo em quatro quadrantes. A cada ponto $P(x, y)$ com coordenadas (x, y) no círculo trigonométrico podemos associar dois arcos que percorrem o círculo partindo do ponto A em direção a P, um no sentido anti-horário e outro no sentido horário.

Comentamos que, o comprimento de qualquer arco é sempre a medida do ângulo central em radianos, devido a medida do raio ser 1, retomamos o exemplo que calculamos o comprimento de um arco com ângulo 30° e do arco com ângulo de $\frac{\pi}{6}$ radianos, contidos em uma circunferência de raio 1, observamos tanto para 30° ou $\frac{\pi}{6}$ radianos o comprimento do arco é $\frac{\pi}{6}$. Então mencionamos que podemos obter o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos usando o círculo trigonométrico.

Em seguida, começamos a passar a definição de seno no círculo trigonométrico a partir de um triângulo retângulo e utilizando as relações trigonométricas no triângulo estudadas na aula anterior. Para isso, foi mostrada a Figura 40 e pedido para que eles calculassem o seno do ângulo β. Um dos alunos respondeu corretamente que o seno seria o cateto oposto sobre a hipotenusa e nesse caso o seno seria n.

Figura 39: Seno no ciclo trigonométrico.



Fonte: Próprios autores.

Em seguida, foi explicado que a resolução do colega estava correta e foi formalizada a definição de seno no ciclo trigonométrico que corresponde ao valor da ordenada do ponto tomado no ciclo. Foi pedido se os alunos tinham alguma dúvida e ninguém se manifestou.

Então foi passado sobre o sinal do seno nos quadrantes e explicado que como o seno é o valor da ordenada, então o valor do seno vai acompanhar o sinal do eixo das ordenadas nos quatro quadrantes. Foi pedido aos alunos que dissessem qual era o valor do seno em cada quadrante e dois alunos responderam corretamente. Foi explicado também que os valores do seno contêm uma simetria nos quatro quadrantes e que seria útil para determinar o valor do seno de ângulos maiores que $90°$. Durante as explicações os alunos se demonstraram atentos ao que era exposto. Além disso, não apresentaram dúvidas.

Após essas explicações foi dado uma pausa para o intervalo de 20 minutos e retornamos às 10 horas com a explicação do cosseno de um ângulo. Para construir a definição de seno, foi utilizado o mesmo triângulo da Figura 40 e foi explicado que pela relação trigonométrica no triângulo retângulo temos que o cosseno de um ângulo é o cateto adjacente sobre a hipotenusa e nesse caso será m que é o valor da abscissa do ponto P. Em seguida, foi definido o cosseno no ciclo trigonométrico é igual a abscissa do ponto P no ciclo trigonométrico. Foi passado também que o sinal do cosseno nos quadrantes é sempre o valor da abscissa do ponto, logo, o valor do cosseno acompanhará o sinal do eixo das abscissas nos 4 quadrantes. Durante as explicações desses conceitos os alunos se mantiveram quietos e não apresentaram dúvidas.

Em seguida, foi construída a definição de tangente utilizando as relações trigonométricas no triângulo retângulo e estudado o sinal da função tangente nos quatro quadrantes. Os alunos permaneceram em silêncio e não questionaram em nenhum momento.

Por fim, o último conteúdo a ser explicado foram os ângulos elementares do ciclo trigonométrico e seus múltiplos. Foi passado alguns exemplos de como determinar o seno, cosseno e tangente de múltiplos dos ângulos elementares. Após as explicações, foi pedido para que os alunos se agrupassem em grupos para encontrar o valor do seno, cosseno e tangente de alguns ângulos múltiplos dos elementares.

Os alunos se dividiram em 3 grupos e todos tentaram realizar a tarefa. Para auxiliá-los nas resoluções, distribuímos um material manipulável que consistia em uma placa de metal grande com o ciclo trigonométrico, os ângulos elementares com seus valores aplicados nas funções trigonométricas desenhados. Durante as resoluções, auxiliávamos os alunos com dúvidas apresentadas pelos grupos conforme solicitavam.

A aula foi encerrada às 11h40 e solicitamos que terminassem a atividade em casa e tentassem resolver as questões deixadas nos slides passados na aula.

2.5 Módulo/encontro 3 -

2.5.1 Plano de aula

PLANO DE AULA

Conteúdo: Trigonometria.

Público-Alvo: Alunos egressos da Rede Pública de Ensino CASCAVEL, inscritos no projeto.

Objetivo geral: Introduzir os conceitos de funções trigonométricas.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com funções trigonométricas, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Conhecer o conceito de funções periódicas;
- Identificar as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente como funções periódicas;
- Diferenciar o gráfico das funções trigonométricas;
- Resolver exercícios envolvendo os conceitos estudados.

Tempo de execução: Um encontro de 4 horas.

Recursos didáticos: Quadro negro, giz, PowerPoint,

Encaminhamento metodológico: Inicialmente vamos revisar alguns conceitos estudados na aula anterior sobre o círculo trigonométrico.

Na aula anterior vimos que, dado um ponto P no círculo trigonométrico podemos determinar o arco $\widehat{AP}$, com medida $\widehat{AP} = \alpha\ rad$, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, temos então

$sen(\alpha) = n$, tal que n é a ordenada de P

$cos(\alpha) = m$, tal que m é a abscissa de P

Para $\frac{\pi}{2} \neq \alpha \neq \frac{3\pi}{2}$, temos:

$$tg(\alpha) = t$$

tal que t é a ordenada do ponto T, e T é a interseção da reta tangente ao ciclo trigonométrico com a reta que corta o centro do ciclo e o ponto P.

Vamos apresentar agora as funções trigonométricas. Mas antes disso, introduzir o conceito de função periódica que será necessário.

Função periódica

Uma função $f: A \rightarrow B$ é periódica se existir um número $p > 0$ satisfazendo a equação

$f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in A$.

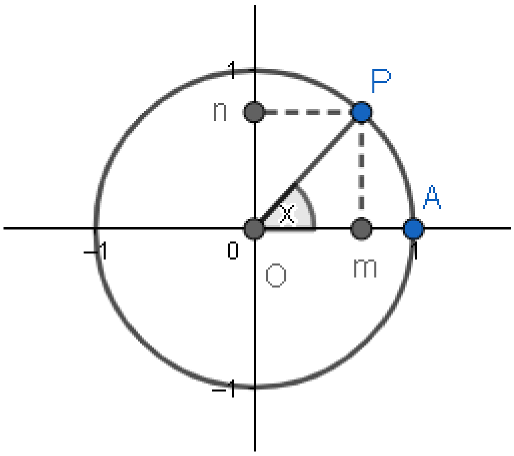
O menor valor de p que satisfaz a condição acima é chamado período de f.

As funções seno e cosseno que veremos a seguir são exemplos de funções periódicas.

Função seno

Seja $x \in \mathbb{R}$ e $P(m, n)$ a imagem de x no ciclo trigonométrico. Denominamos $sen(x)$ a ordenada de P, ou seja, $sen(x) = n$.

Figura 40: Ciclo trigonométrico.



Fonte: Próprios autores.

Definimos função seno a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada x o número $sen(x)$, isto é

$$f(x) = sen(x)$$

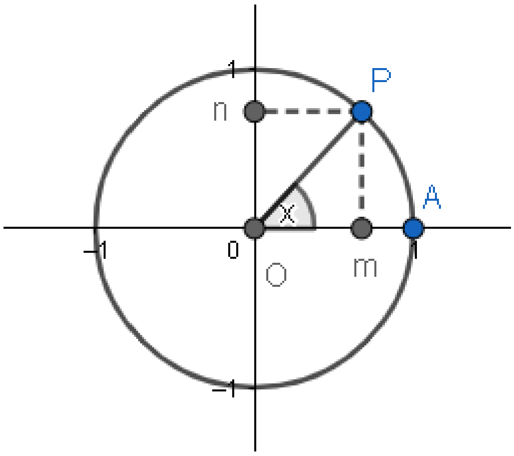
Como o ponto P está no ciclo, então sua ordenada pode variar apenas entre -1 e 1, isto é, $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$. Logo a imagem da função seno é o intervalo $[-1,1]$. Já o domínio é todo o conjunto dos números reais.

A função seno é uma função periódica e seu período é 2π.

Função cosseno

Seja $x \in \mathbb{R}$ e $P(m, n)$ a imagem de x no ciclo trigonométrico. Denominamos $cos(x)$ a abscissa de P, ou seja, $sen(x) = m$.

Figura 41: Ciclo trigonométrico.



Fonte: Próprios autores.

Definimos a função cosseno a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada x o número $cos(x)$, isto é

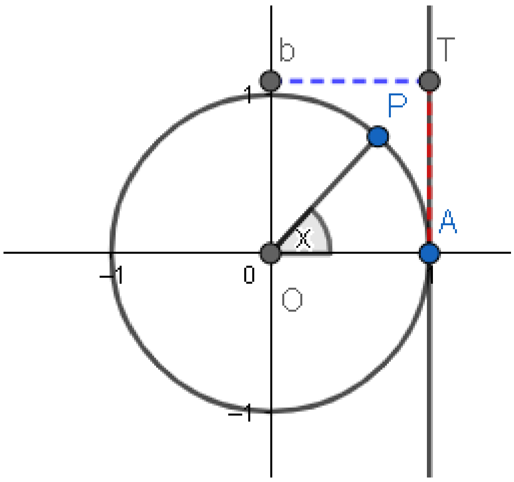
$$f(x) = \cos(x)$$

Como o ponto P está no ciclo, então sua abscissa pode variar apenas entre -1 e 1, isto é, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$. Logo a imagem da função cosseno é o intervalo $[-1,1]$. Já o domínio é todo o conjunto dos números reais.

Função tangente

Seja $x \in \mathbb{R}$ e $P(m,n)$ a imagem de x no ciclo trigonométrico. Consideremos a reta OP e seja $T(a,b)$ sua interseção com o eixo das tangentes. Denominamos tangente de x a ordenada b do ponto T.

Figura 42: Ciclo trigonométrico.



Fonte: Próprios autores.

Definimos a função tangente $f: D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ o número $tg(x)$, isto é,

$$f(x) = tg(x)$$

Notemos que $f(x) = tg(x)$ não está definida para $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, logo não está definida para nenhum $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Logo o domínio da função tangente é $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$. A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$, pois para todo y real existe x tal que $tg(x) = y$, ou seja, todo y real está associado a algum x real de forma que $tg(x) = y$.

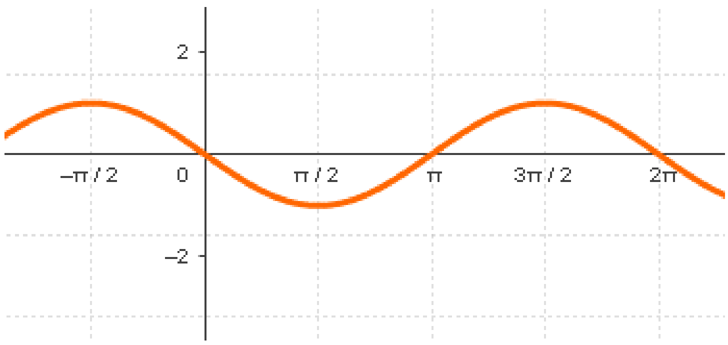
Gráficos das funções trigonométricas

Trabalhar as funções trigonométricas e os parâmetros no geogebra. Construir os gráficos, mostrar o período e a influência dos parâmetros nas funções. Para isso, acessar: https://www.geogebra.org/m/Z5NRazWS. Antes disso, acessar: https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour_pt_BR.html, a fim de ilustrar os ângulos maiores de 360°, além de também poder ser usado em qualquer momento da aula que se fazer necessário o auxílio para sanar dúvidas que possam surgir.

Gráfico da função seno

A função seno é periódica e o seu período é 2π. Vejamos que $sen(x + 2\pi) = sen(x)$.

Figura 43: Gráfico da função seno.

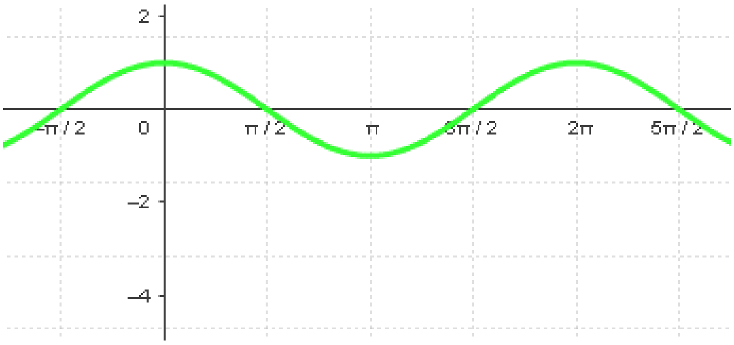


Fonte: https://www.geogebra.org/m/Z5NRazWS. Acesso em: 31 mai. 2022.

Gráfico da função cosseno

A função cosseno é periódica e o seu período é 2π. Vejamos que $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

Figura 44: Gráfico da função cosseno.

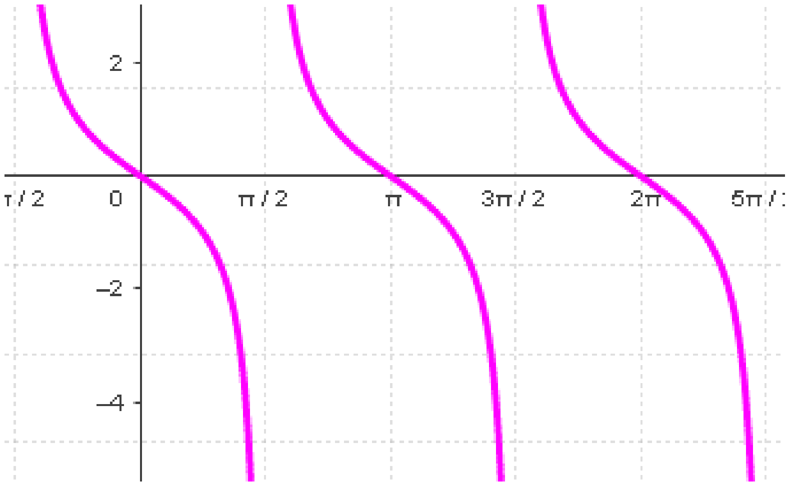


Fonte: https://www.geogebra.org/m/Z5NRazWS. Acesso em: 31 mai. 2022.

Gráfico da função tangente

A função tangente é periódica e seu período é π.

Figura 45: Gráfico da função tangente.



Fonte: https://www.geogebra.org/m/Z5NRazWS. Acesso em: 31 mai. 2022.

Alguns parâmetros também influenciam na função seno, cosseno e tangente.

$$f(x) = asen(bx + c) + d$$

$$f(x) = a\ cos(bx + c) + d$$

$$f(x) = \ atg(bx + c) + d$$

Parâmetro a: altera a amplitude;

Parâmetro b: altera o período;

Parâmetro c: desloca no eixo x;

Parâmetro d: desloca no eixo y.

SENO, COSSENO E TANGENTE DOS ARCOS DE MEDIDAS a + b E a – b

Dados dois arcos trigonométricos de medidas a e b, podemos calcular o seno, o cosseno e a tangente da soma ou da diferença desses arcos através das identidades a seguir, conhecidas por fórmulas de adição de arcos.

(I)

$$sen\ (a + b) = sen\, a\, cos\, b + sen\, b\, cos\, a$$

(II)

$$sen\ (a - b) = sen\, a\, cos\, b - sen\, b\, cos\, a$$

(III)

$$cos\ (a + b) = cos\, a\, cos\, b - sen\, a\, sen\, b$$

(IV)

$$cos\ (a - b) = cos\, a\, cos\, b + sen\, a\, sen\, b$$

(V)

$$tg\ (a + b) = \frac{tg\, a + tg\, b}{1 - tg\, a\, tg\, b}$$

(Obedecidas as condições de existência.)

(VI)

$$tg\ (a - b) = \frac{tg\, a - tg\, b}{1 + tg\, a\, tg\, b}$$

(Obedecidas as condições de existência.)

Com isso, explicaremos os seguintes exemplos:

Exemplo 1: $sen\ 75° = sen\ (30° + 45°) = sen\ 30°\, cos\ 45° + sen\ 45°\, cos\ 30°$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Exemplo 2: $\cos 105° = cos\ (60° + 45°) = cos\ 60°\, cos\ 45° - sen\ 60°\, sen\ 45°$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

Exemplo 3: $sen\ 15° = sen\ (45° - 30°) = sen\ 45° \cos 30\ ° - sen\ 30° \cos 45\ °$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Exemplo 4: $sen\ 15° = sen\ (60° - 45°) = sen\ 60° \cos 45° - sen\ 45° \cos 60°$

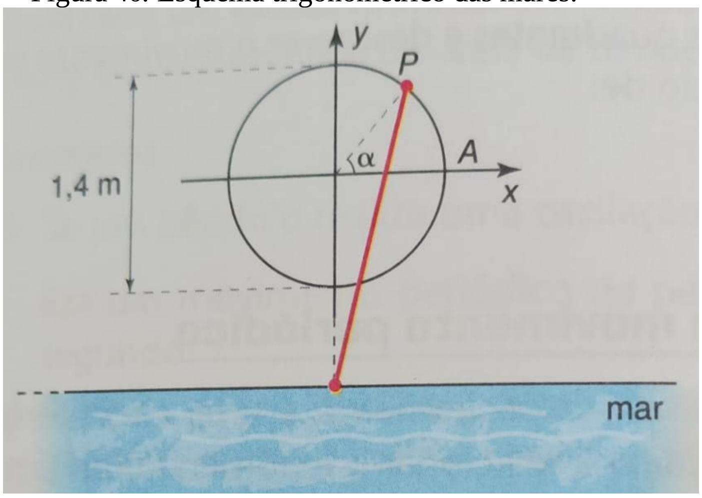
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Exercícios:

1) Em uma região, em determinado dia, a amplitude das marés é $1{,}4\ m$, e o intervalo de tempo entre duas marés altas consecutivas (ou entre duas marés baixas consecutivas) é 12 horas. Sabendo que uma maré alta ocorre às $3h$, descrever, por meio de uma função trigonométrica, o movimento das marés nessa região em função do horário t, em hora, neste dia.

R: Imaginemos, em um plano vertical, uma circunferência acima do nível do mar e uma haste rígida ligando um ponto P da circunferência a um ponto do nível do mar, no prolongamento do eixo Oy, conforme mostra a figura:

Figura 46: Esquema trigonométrico das marés.



Fonte: PAIVA, 2013, p. 80.

O subir e descer da maré, que lembra o movimento de um imenso pistão, provoca um movimento circular do ponto P. Supondo esse movimento com velocidade constante e no sentido anti-horário, vamos calcular a medida α do arco $\widehat{AP}$, em função do tempo t, em hora, em que $t = 0$ corresponda a um instante em que P passou pelo ponto A:

$Medida\ do\ arco\ (rad)$ $\qquad$ $Tempo(h)$

2π ________________________ 12

α __________________________ t

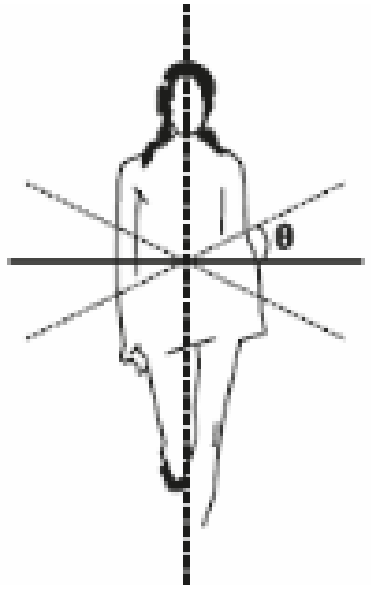
$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi t}{6} rad$$

Assim, podemos descrever o movimento da maré nesse dia, em função do tempo t, em hora $(0 \leq t \leq 24)$:

- Pela ordenada do ponto P: $f(t) = 0{,}7\, sen\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ ou
- Pela abscissa do ponto P: $g(t) = 0{,}7 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$;

2) Os desfiles de moda parecem impor implicitamente tanto o “vestir-se bem” quanto o “ser bela” definindo desse modo padrões de perfeição. Nesses desfiles de moda, a rotação pélvica do andar feminino é exagerada quando comparada ao marchar masculino, em passos de igual amplitude. Esse movimento oscilatório do andar feminino pode ser avaliado a partir da variação do ângulo θ, conforme ilustrado na figura abaixo, ao caminhar uniformemente no decorrer do tempo (t).

Figura 47: Simetria do corpo.



Fonte: Próprios autores.

Um modelo matemático que pode representar esse movimento oscilatório do andar feminino é dado $\theta(t) = \frac{\pi}{10} cos(\frac{4\pi}{3} \times t)$. Nestas condições, o valor de $\theta\left(\frac{3}{2}\right)$ é?

a) $\frac{8}{\pi}$

b) $\frac{10}{\pi}$

c) $\frac{12}{\pi}$

d) $\frac{18}{\pi}$

e) $\frac{\pi}{20}$

R: Como temos uma função e queremos saber o valor dessa função no ponto $t = \frac{3}{2}$, basta substituímos t por $\frac{3}{2}$ na lei de formação de θ:

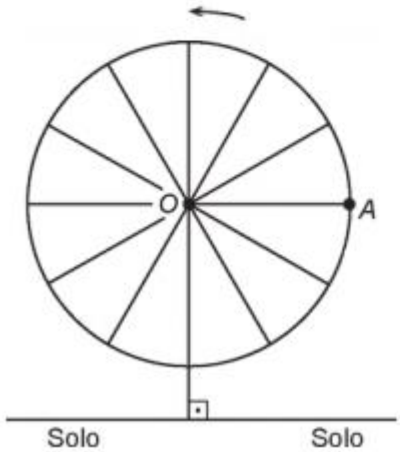
$$\theta(\frac{3}{2}) \ = \ \frac{\pi}{10} \ cos(\frac{4\pi}{3} \times \frac{3}{2})$$

$$\theta\left(\frac{3}{2}\right) = \ \frac{\pi}{10} \ cos(2\pi) = \frac{\pi}{10}$$

Alternativa b).

3) (ENEM-2018) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a *High Roller*, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto *A* representa uma de suas cadeiras:

Figura 48: Roda gigante.

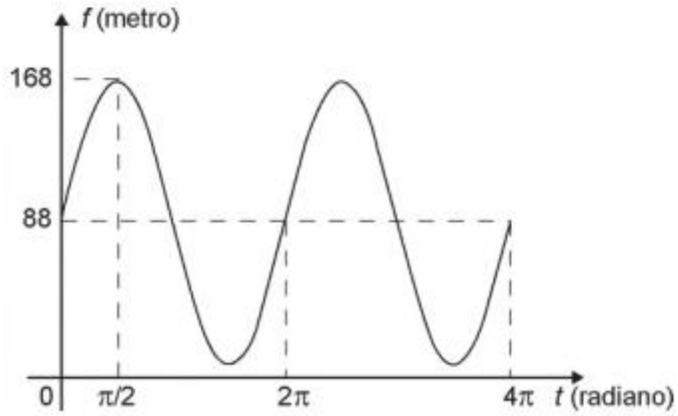


Fonte: https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/questoes/998da699-e8. Acesso em: 31 mai. 2022.

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t.

Após duas voltas completas, f em o seguinte gráfico:

Figura 49: Gráfico da função que descreve a altura do ponto A.



Fonte: https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/questoes/998da699-e8. Acesso: 31 mai.2022.

A expressão da função altura é dada por

a) $f(t) = 80sen(t) + 88$

b) $f(t) = 80\cos(t) + 88$

c) $f(t) = 88\cos(t) + 168$

d) $f(t) = 168sen(t) + 88\cos(t)$

e) $f(t) = 88sen(t) + 168\cos(t)$

R: Percebemos que o gráfico deslocou no eixo y em 88 unidades, logo $d = 88$, a amplitude do gráfico também foi alterada de 1 para 80 (168-88=80), logo $a = 80$, o período da função contínua sendo 2π, assim $b = 1$ e não houve deslocamento no eixo x logo $c = 0$.

$$f(x) = asen(bx + c) + d$$

$$f(x) = a\ cos(bx + c) + d$$

$$f(t) = 88 + 80\ sen(t)$$

$$f(t) = 88 + 80cos(t)$$

Observando no gráfico temos que $f(0) = 88$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 168$.

$$f(t) = 88 + 80\ sen(t) \rightarrow f(0) = 88 + 80sen(0) = 88$$

$$f(t) = 88 + 80cos(t) \rightarrow f(0) = 88 + 80\cos(0) = 168$$

Logo a função correta é $f(t) = 88 + 80\ sen(t)$.

4) Em certa região, a temperatura média mensal, em grau Celsius, varia de acordo com a lei $f(t) = 26 + 12 \cdot \cos\frac{\pi t}{6}$, em que t é medido em mês. Calcule para essa região:

a. A temperatura máxima e mínima;

R: Para encontrar a temperatura máxima devemos analisar o valor do cosseno. Sabe-se que os valores do cosseno variam de -1 a 1 independente do ângulo considerado, logo, para encontrar a temperatura máxima devemos utilizar o valor máximo do cosseno, que é igual a 1, ou seja,

$$f(t) = 26 + 12 \cdot \cos\frac{\pi t}{6}$$
$$\Rightarrow f(t) = 26 + 12 \cdot 1$$
$$\Rightarrow f(t) = 26 + 12$$
$$\Rightarrow f(t) = 38°\ C$$

Para encontrar a temperatura mínima devemos considerar o valor mínimo do cosseno, ou seja, -1

$$f(t) = 26 + 12 \cdot \cos\frac{\pi t}{6}$$
$$\Rightarrow f(t) = 26 + 12 \cdot (-1)$$
$$\Rightarrow f(t) = 26 - 12$$
$$\Rightarrow f(t) = 14°C$$

b. A amplitude térmica.

R: Para encontrar a amplitude térmica basta encontrar a diferença entre a temperatura máxima e mínima, ou seja:

$$A = Máx - Min$$
$$\Rightarrow A = 38 - 14$$
$$\Rightarrow A = 24°C$$

5) Calcule:

a) $sen\ 105°$;

R: Considerando que $sen\ 105° = sen(45° + 60°)$, aplicamos a fórmula para o seno da soma de arcos:

$$sen(45° + 60°) = sen(45°)\cos(60°) + sen(60°)\cos(45°)$$

$$\Rightarrow sen(45° + 60°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow sen(45° + 60°) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

b) $\cos 15°$;

R: Considerando que $cos\ 15° = cos(60° - 45°)$, aplicamos a fórmula para o cosseno da diferença de arcos:

$$cos(60° - 45°) = cos\ (60°)\cos(45°) + sen(60°)sen(45°)$$

$$\Rightarrow cos(60° - 45°) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow cos(60° - 45°) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

c) $tg\ 15°$;

R: Considerando que $tg\ 15° = tg(60° - 45°)$, aplicamos a fórmula para a tangente da diferença de arcos:

$$tg\ (60° - 45°) = \frac{tg\ 60° - tg\ 45°}{1 + tg\ 60°\ tg\ 45°}$$

$$\Rightarrow tg\ (60° - 45°) = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1}$$

$$\Rightarrow tg\ (60° - 45°) = 2 - \sqrt{3}$$

Referências:

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante Matemática 3.** São Paulo: Edições SM, 2016.

MODERNA, E. **Conexões com a matemática.** 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013.

PAIVA, M. Matemática volume único. São Paulo: Editora Moderna, 2000.
IEZZI, G. **Os Fundamentos da Matemática Elementar**: Trigonometria. Rio de Janeiro: Atual Editora, 2013.

QUESTÕES de concursos. Disponível em: https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/questoes/998da699-e8. Acesso em: 31 mai. 2022.

Instituto GeoGebra Portugal. **Transformações dos gráficos de funções trigonométricas**. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/Z5NRazWS. Acesso em: 31 mai. 2022.
LEMES, M. **Parâmetros das funções trigonométricas**. Disponível em: https://querobolsa.com.br/enem/matematica/parametros-das-funcoes-trigonometricas. Acesso em: 31 mai. 2022.

DOCPLAYER. Disponível em: https://docplayer.com.br/80809530-Funcao-cosseno-causam-graves-problemas-a-toda.html. Acesso em: 03 jun. 2022.

2.5.2 Relatório encontro 3

No dia 04 de junho realizamos o terceiro encontro do segundo semestre do PROMAT. Neste dia estavam presentes 8 alunos. Iniciamos a aula com a correção de três exercícios que haviam ficado para os alunos resolverem em casa. Os alunos tinham conseguido resolver os exercícios e demonstraram não ficar com dúvidas.

alternativa d) O sinal será negativo, pois está no eixo negativo das ordenadas, logo terá o mesmo valor que $-\, sen\ 30° = -\frac{1}{2}$

alternativa e) O sinal será negativo, pois está no eixo negativo das abcissas, logo terá o mesmo valor que $-\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

alternativa f) Terá o mesmo sinal e valor de $\tan 45°$, logo

$$\tan 225° = \tan 45° = 1$$

Após a correção relembramos alguns conceitos como seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico. Primeiro apresentamos a definição de função periódica, explicamos que uma função $f\colon A \to B$ é periódica se a equação $f(x+p) = f(x)$ é satisfeita para todo ponto x de A, e o menor valor de p que a equação é válida é chamado de período. Logo depois, mostramos as definições em um slide e explicamos que dado um ponto P no ciclo podemos determinar o arco $\widehat{AP}$, sendo que A é a origem dos arcos no ciclo. Se α é o ângulo central do arco $\widehat{AP}$, o seno de α é a ordenada de P, o cosseno de α é a abscissa de P, e a tangente de α é a ordenada do ponto determinado pela interseção da reta tangente ao ciclo com a reta que passa pelo cento da circunferência e por P. Estes conceitos já haviam sido estudados no segundo encontro e retomamos para introduzir as funções trigonométricas. Os alunos prestaram a atenção durante as explicações e demonstraram não ter dúvidas.

Seguindo a aula, nos slides mostramos a definição da função seno. Explicamos que, a função seno é definida no conjunto dos números reais nos reais, isto é, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de forma que para cada x real calculamos $f(x) = sen(x)$. O domínio é $\mathbb{R}$, já o conjunto imagem é $[-1,1]$, pois $sen(x)$ assume valores entre -1 e 1. Também é uma função periódica de período 2π. Para exemplificar o período 2π, tomamos os valores de $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \pi$ e mostramos que a equação $f(x+p) = f(x)$ é satisfeita.

Após isso, passamos a definição de função cosseno. A função cosseno é definida dos reais nos reais, isto é, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de forma que para cada x real calculamos $f(x) = cos(x)$. O conjunto domínio e imagem são iguais da função seno, ou seja, domínio é $\mathbb{R}$ e o conjunto imagem é $[-1,1]$ pois $cos(x)$ varia entre -1 e 1. Também é uma função periódica e seu período é 2π. Para exemplificar, tomamos os valores de $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \pi$ e mostramos que a equação $f(x + p) = f(x)$ é satisfeita.

A função tangente é definida de um conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$ nos reais, isto é, $f: D \to \mathbb{R}$. O domínio da função tangente é D, notemos que para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ não existe $tg(x)$, já o conjunto imagem é $\mathbb{R}$, pois todo y real está associado a algum x real de forma que $tg(x) = y$.

Foram apresentadas as relações trigonométricas de seno, cosseno e tangente da soma e subtração de dois ângulos. Foi explicado que não seriam passadas as demonstrações dessas relações, pois não se encaixariam nos objetivos da aula. Em seguida, foram explicadas essas relações e resolvemos os quatro exemplos conforme o plano desta aula. Durante as explicações os alunos se mantiveram em silêncio e prestando atenção no conteúdo. Ressaltamos que não sobrou tempo para trabalhar os exercícios planejados, então deixamos para que resolvessem em casa.

2.6 Módulo/encontro 4 -

2.6.1 Plano de aula

PLANO DE AULA

Conteúdo: Geometria analítica.

Público-Alvo: Alunos egressos da Rede Pública de Ensino CASCAVEL, inscritos no projeto.

Objetivo geral: Introduzir os conceitos de coordenadas cartesianas no plano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento e pontos colineares.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com o conteúdo de geometria analítica objetiva-se que os alunos sejam capazes de:

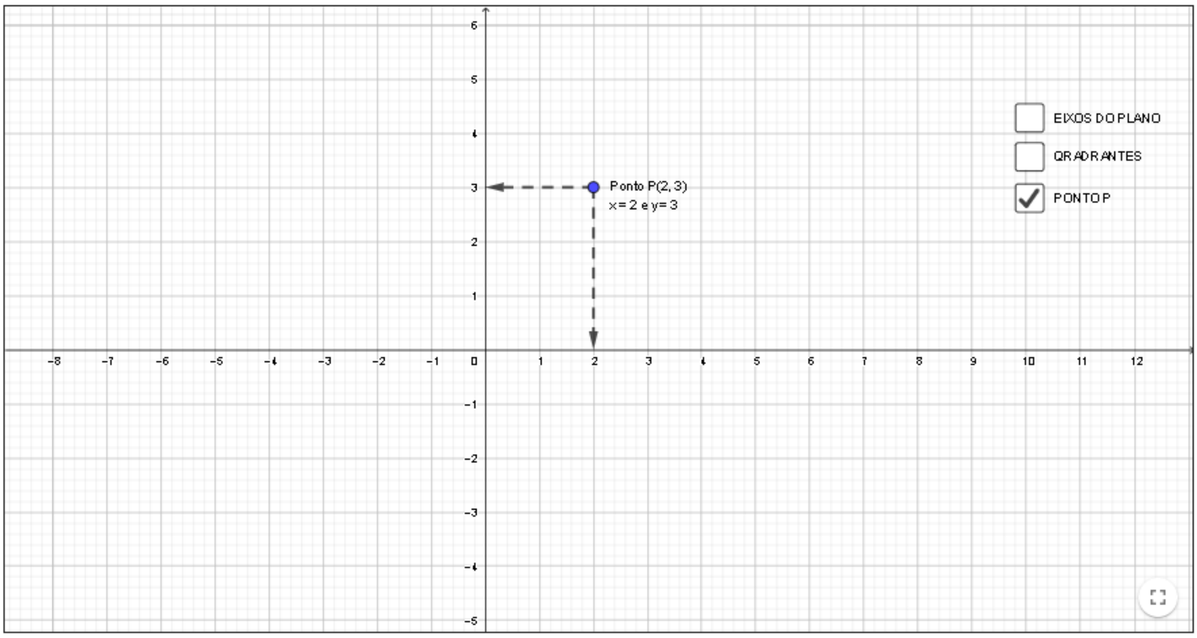
- Identificar situações do cotidiano em que seja possível aplicar os conceitos de geometria analítica;
- Aplicar os conceitos de geometria analítica em problemas relacionados a esse conteúdo;
- Compreender como se desenvolvem os cálculos relacionados a esse conteúdo.

Tempo de execução: 35 minutos.

Recursos didáticos: PowerPoint, geogebra.

Encaminhamento metodológico: Iniciar a videoaula explicando sobre o sistema cartesiano e coordenadas no plano. Vamos fazer isso com o material "Relembrando o plano cartesiano" disponível em: https://www.geogebra.org/m/uqgysz4n.

Figura 50: Relembrando o plano cartesiano.



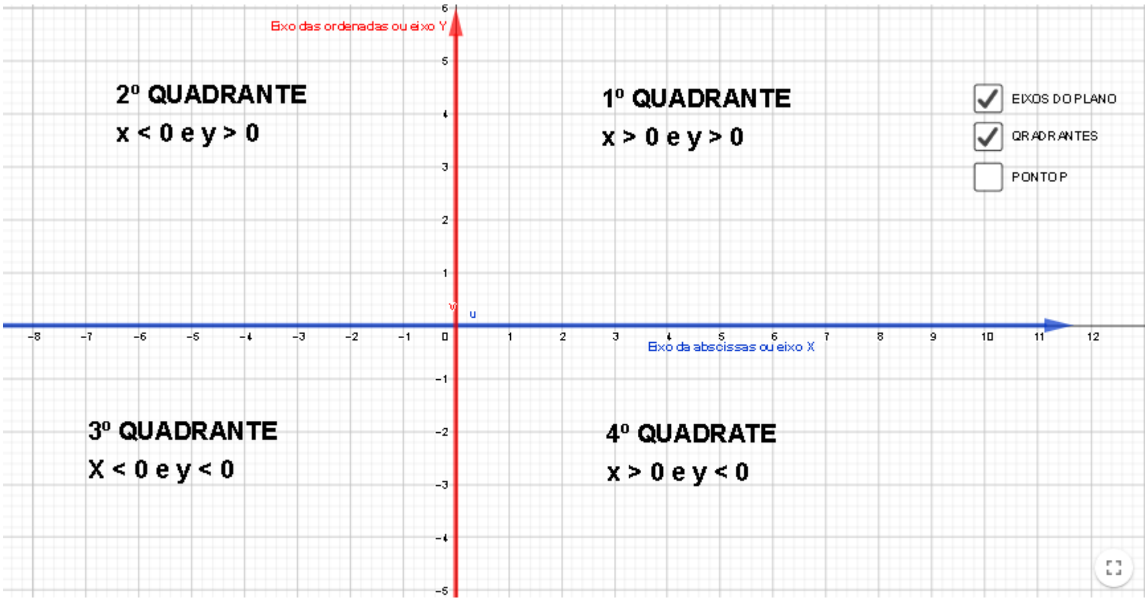
Fonte: https://www.geogebra.org/m/uqgysz4n.

O sistema cartesiano é formado por dois eixos perpendiculares (eixo x e eixo y), permitem a localização de pontos no plano ou no espaço. A interseção desses eixos é o ponto chamado de origem do sistema.

Explicar os quadrantes e a análise do sinal no geogebra.

O eixo x e o eixo y dividem o plano em quatro quadrantes.

Figura 51: Quadrantes.



Fonte: https://www.geogebra.org/m/uqgysz4n.

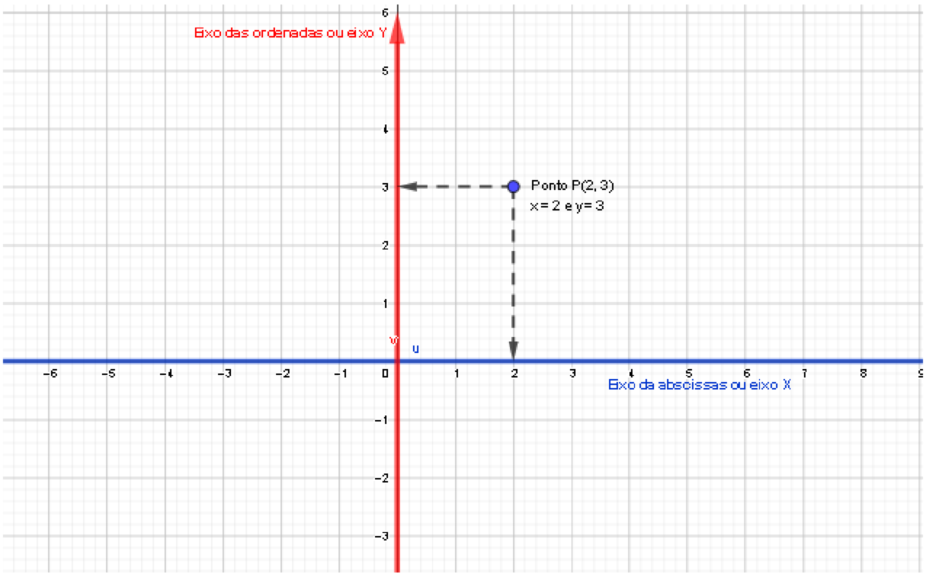
O sinal das coordenadas do ponto depende em qual quadrante esse ponto está.

- Se um ponto P está no **primeiro quadrante** então a coordenada em x ou abscissa tem sinal positivo, e a coordenada em y ou a ordenada tem sinal positivo também.
- Se um ponto P está no **segundo quadrante** então a coordenada em x ou abscissa tem sinal negativo, e a coordenada em y ou a ordenada tem sinal positivo.
- Se um ponto P está no **terceiro quadrante** então a coordenada em x ou abscissa tem sinal negativo, e a coordenada em y ou a ordenada tem sinal negativo também.
- Se um ponto P está no **quarto quadrante** então a coordenada em x ou abscissa tem sinal positivo, e a coordenada em y ou a ordenada tem sinal negativo.

Para determinar a localização de um ponto P no plano devemos olhar sua abscissa e sua ordenada. Escrevemos o ponto P em cordenadas cartesianas como $P(x, y)$ ou $P = (x, y)$.

Vejamos o ponto $P(2,3)$ no plano.

Figura 52: Localização de um ponto no plano cartesiano.



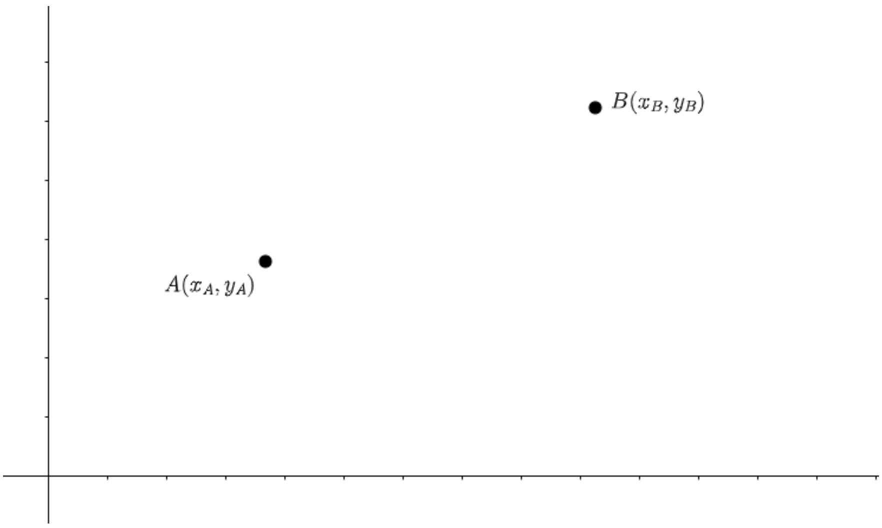
Fonte: https://www.geogebra.org/m/uqgysz4n.

Distância entre dois pontos

Utilizando a demonstração dada no aplicativo Geogebra disponível no link https://www.geogebra.org/material/edit/id/ugpp6kps vamos construir a fórmula utilizada para calcular a distância entre dois pontos.

Sejam dois pontos quaisquer A e B, cujas coordenadas cartesianas são $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ é possível calcular a distância entre esses dois pontos. Para isso, vamos analisar graficamente como isso acontece. Na Figura 4 é possível observar os pontos A e B no plano cartesiano.

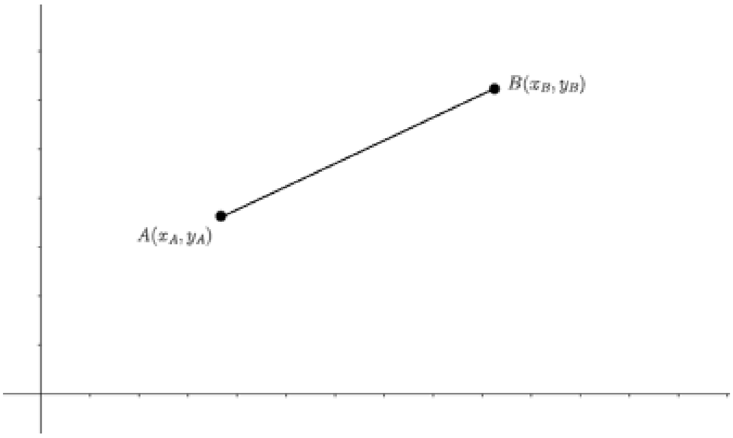
Figura 53: Pontos no plano cartesiano.



Fonte: Próprios autores.

A distância entre os pontos A e B é dado pelo segmento que une esses dois pontos como na Figura 5. Nos resta saber como determinar o comprimento desse segmento.

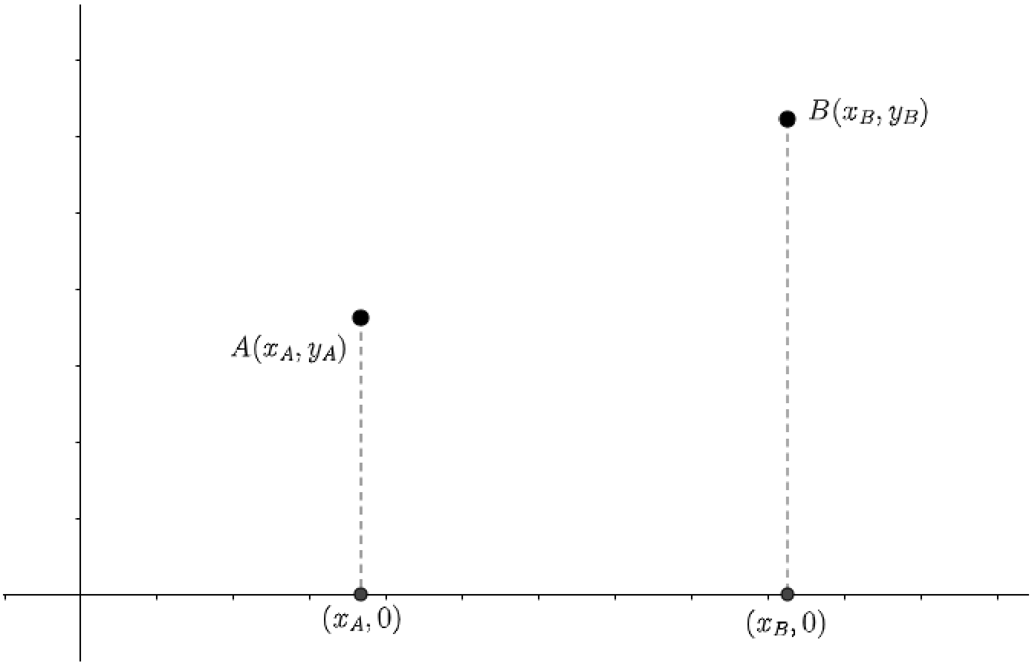
Figura 54: Segmento que representa a distância entre os pontos A e B.



Fonte: Próprios autores.

Note que a abscissa do ponto B tem valor igual a x_B e a abscissa do ponto A tem valor igual a x_A. Logo, se traçarmos uma reta perpendicular ao eixo das abscissas que passe pelo ponto B e o ponto $(x_B, 0)$ e outra reta perpendicular ao eixo das abscissas que passe pelo ponto A e pelo ponto $(x_A, 0)$ (Figura 6) teremos que essas duas retas serão paralelas entre si e paralelas ao eixo das ordenadas.

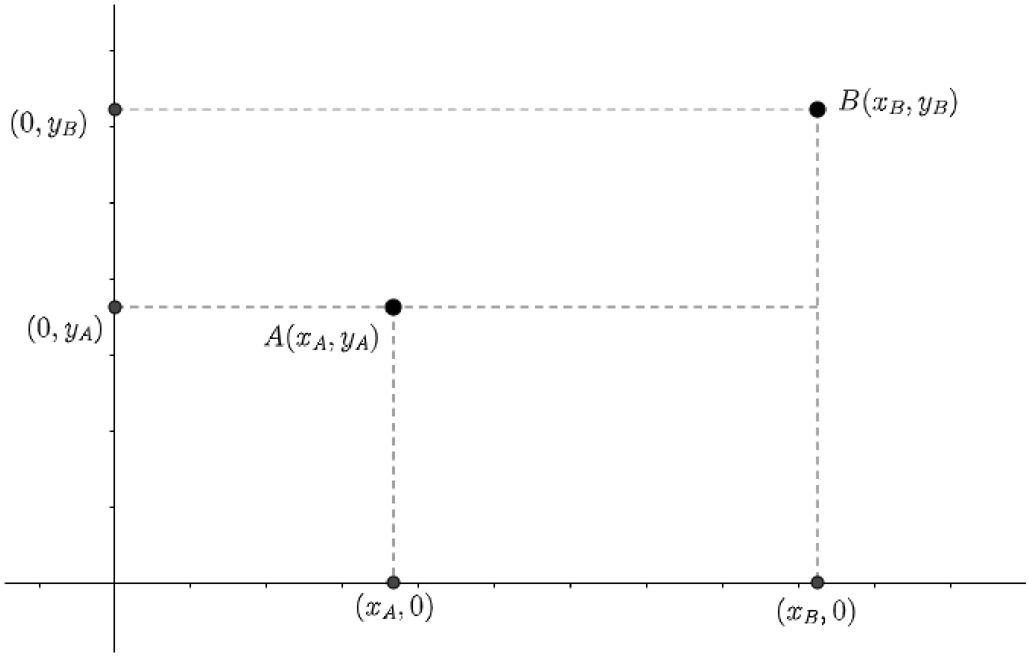
Figura 55: Retas traçadas entre os pontos A e B e o os pontos $(x_A, 0)$e $(x_B, 0)$, respectivamente.



Fonte: Próprios autores.

Do mesmo modo, o ponto B tem a ordenada com valor y_B e o ponto A possui ordenada com valor y_A. Logo, se traçarmos uma reta perpendicular ao eixo das ordenadas que passe pelo ponto B e o ponto $(0, y_B)$ e outra reta que passe pelo ponto A e pelo ponto $(0, y_A)$ (Figura 7) teremos que essas duas retas serão paralelas entre si e paralelas ao eixo das abscissas.

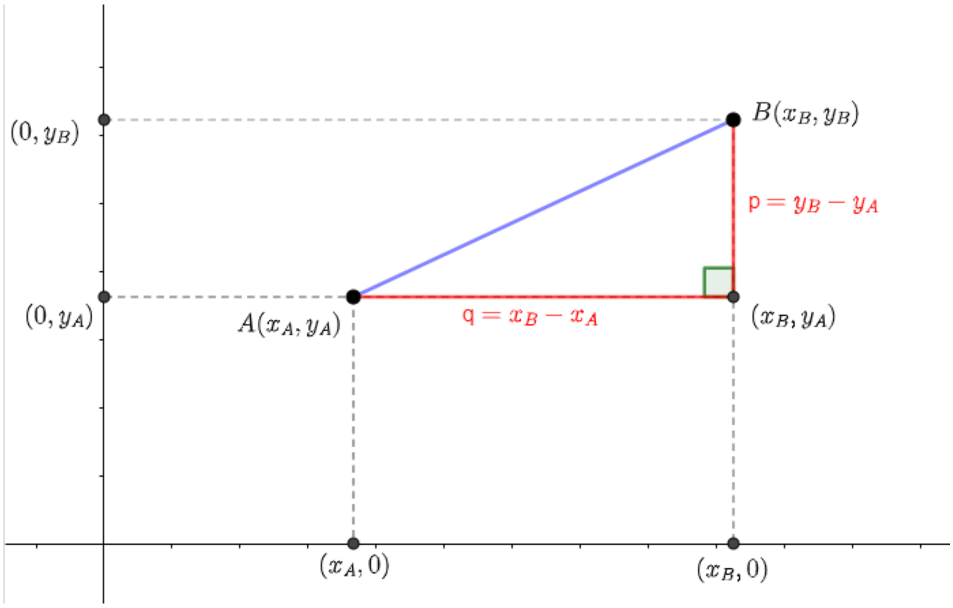
Figura 56: Retas que passam pelos pontos A e B e por $(0, y_A)$ e $(0, y_B)$, respectivamente.



Fonte: Próprios autores.

Note que a reta que passa pelo ponto A e pelo ponto $(0, y_A)$ intercepta a reta que passa pelos pontos B e $(x_B, 0)$. O ponto de interseção iremos denominar como ponto G. Ao traçarmos o segmento $\overline{AB}$ o qual desejamos encontrar seu comprimento, nota-se que forma um triângulo retângulo com os pontos A, B e G. É possível observar que o valor do cateto GB que denominaremos como p é o módulo da diferença entre as ordenadas do ponto A e B e o cateto AG que denominaremos como q é o módulo da diferença entre as abscissas do ponto A e B (Figura 8). A hipotenusa do triângulo é o valor que queremos encontrar que representa a distância entre os dois pontos.

Figura 57: Triângulo retângulo formado com as retas.



Fonte: Próprios autores.

Como temos os valores dos catetos do triângulo ΔAGB, conseguimos encontrar a hipotenusa e, consequentemente, encontraremos o valor da distância entre os dois pontos, ou seja,

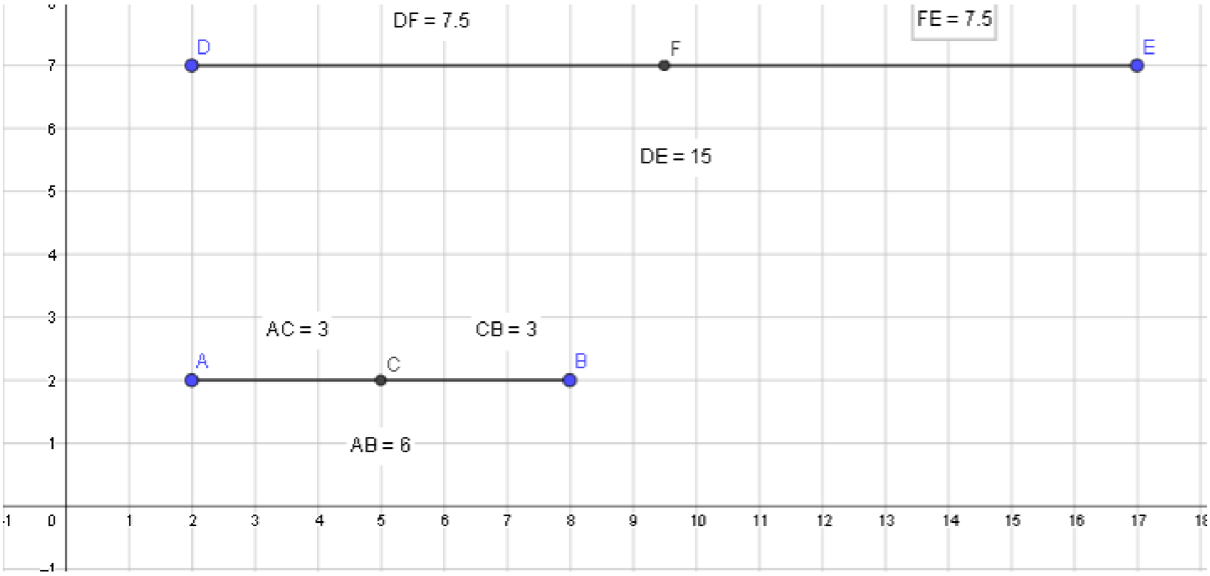
$$h^2 = q^2 + p^2$$
$$\Rightarrow h^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_B - y_A)^2$$
$$\Rightarrow h = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Desse modo, para quaisquer dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, é possível calcular a distância entre eles utilizando $h = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Ponto médio de um segmento

M é o ponto médio do segmento de reta AB, se M divide o segmento AB em dois segmentos congruentes, ou seja, AM≅MB. O ponto médio é o ponto de equilíbrio de um segmento de reta. Na figura 9 podemos observar os segmentos AB e DE, e ainda os seus respectivos pontos médios C e F. Perceba que C divide o segmento AB que mede 6, em dois segmentos de mesma medida $\frac{6}{2} = 3$. E o mesmo ocorre para o ponto F que divide o segmento de tamanho 15 pela metade, ou seja, em dois segmentos de medida $\frac{15}{2} = 7{,}5$.

Figura 58: Segmentos e Pontos médios.



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT.

Podemos ainda sempre determinar o ponto médio entre dois pontos, ou seja, o ponto médio de um segmento da seguinte forma:

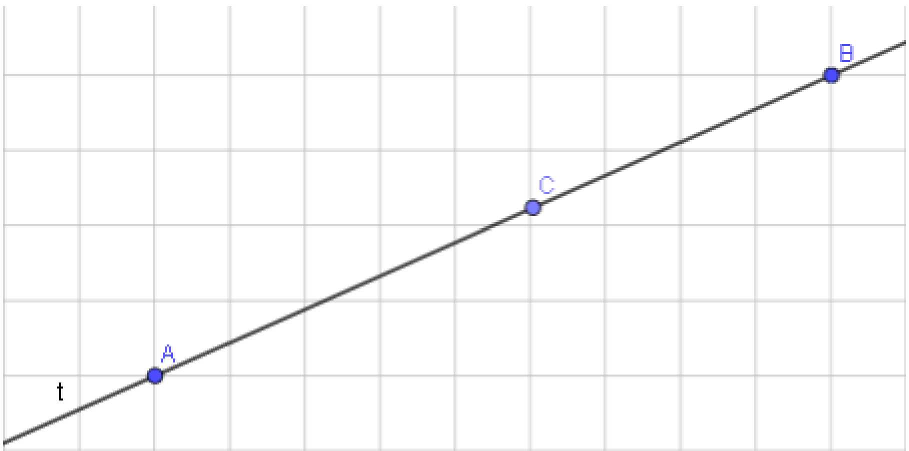
Seja AB o segmento delimitado pelos pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, então o ponto médio C do segmento AB será:

$$C = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Pontos colineares

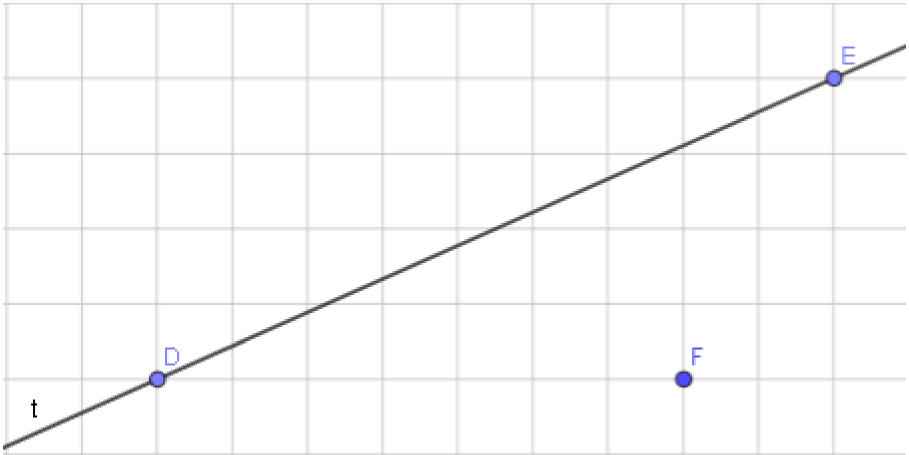
Pontos colineares são pontos que pertencem a uma mesma reta. Na figura 9, os pontos A, B e C são colineares, pois todos pertencem à mesma reta t. Já na figura 10, os pontos D, E e F não são colineares, pois não pertence à reta t.

Figura 59: Pontos colineares



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT.

Figura 60: Pontos não colineares.



Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT.

Referências:

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante Matemática 3.** São Paulo: Edições SM, 2016.

MODERNA, E. **Conexões com a matemática.** 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013.

LACERDA, G. **Relembrando o plano cartesiano**. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/uqgysz4n. Acesso em: 02 jun. 2022.

DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. São Paulo: Editora ática, 2016. http://www.uel.br/projetos/matessencial/basico/fundamental/basico.html#:~:text=Pontos%20colineares%3A%20s%C3%A3o%20pontos%20que,pertencem%20%C3%A0%20mesma%20reta%20r.

2.6.2 Relatório encontro 4

Aula assíncrona, na qual gravamos um vídeo por meio da plataforma JitsiMeet conforme o conteúdo preparado no plano de aula e disponibilizamos na plataforma Youtube por meio do link https://youtu.be/MdbPhMiQiw8. Para os alunos terem acesso a este vídeo enviamos três dias antes do encontro 5 o link através do WhatsApp, onde tínhamos um grupo para nos comunicarmos com os alunos.

Cada integrante do grupo gavou uma parte do plano, sendo anexadas essas partes em um único vídeo durante a edição do vídeo. Após a edição, o vídeo foi indexado no site Youtube.

Para os alunos terem acesso a este vídeo, enviamos três dias após o último encontro presencial o link através do WhatsApp, onde tínhamos um grupo para nos comunicarmos com os alunos. Não houve dificuldades durante as gravações e edições dos vídeos.

2.7 Módulo/encontro 5 -

2.7.1 Plano de aula

PLANO DE AULA

Conteúdo: Geometria analítica.

Público-Alvo: Alunos egressos da Rede Pública de Ensino CASCAVEL, inscritos no projeto.

Objetivo geral: Introduzir os conceitos de equação geral e reduzida da reta e posições relativas entre duas retas no plano.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com geometria analítica, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Determinar a equação geral de uma reta, e a partir disso a equação reduzida;
- Compreender as posições relativas entre duas retas no plano;
- Resolver exercícios envolvendo os conceitos estudados.

Tempo de execução: 3 horas e 40 minutos.

Recursos didáticos: PowerPoint, geogebra, Kahoot.

Encaminhamentos metodológicos:

Para iniciar a aula os professores irão passar um jogo no aplicativo/*site* Quizziz com o intuito de revisar os conteúdos da última aula assíncrona e introduzir a ideia de equação geral e reduzida da reta e posições relativas entre duas retas no plano. Os alunos irão acessar o quiz com o link https://quizizz.com/join?gc=736928&source=liveDashboard e com o código gerado ao iniciar o quiz.

O jogo será composto pelas seguintes questões:

1) Qual o ponto médio M do segmento AB, sabendo que A e B são os pontos extremos e com coordenadas $A = (2, 5)$ e $B = (-7, 1)$.

a) $M = (-2.5\,, 2\ )$

b) $M = (3\,, -2{,}5)$

c) $M = (2, 3)$

d) $M = (-2{,}5, 3)$

R: $M = \left(\frac{2+(-7)}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}\,, 3\right) = (-2.5\,, 3)$. Alternativa d.

2) Sejam os pontos $A = \left(-2, -\sqrt{2}\right)$ $B = \left(\frac{1}{2}, -5\right)$ $C = (47, 189)$ e $D = (-1\,, 1\,)$. Os pontos pertencem respectivamente a quais quadrantes?

a) 4° quadrante, 3° quadrante, 1° quadrante e 2° quadrante.

b) 1° quadrante, 2° quadrante, 4° quadrante e 3° quadrante.

c) 3° quadrante, 4° quadrante, 1° quadrante e 2° quadrante.

d) 2° quadrante, 1° quadrante, 3° quadrante e 4° quadrante.

R: O ponto A pertence ao 3° quadrante, o ponto B pertence ao 4° quadrante, o ponto C pertence ao 1° quadrante e o ponto D pertence ao 2° quadrante. Portanto a alternativa é a letra c.

3) Calcule

4) a distância entre os pontos $A = (\ 6,\ 8)$ e $B = (2\ , 5\ )$.

a) 4

b)3

c)6

d)5

R: A distância d é $\sqrt{(6-2)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$. Alternativa d.

4) Entre dois pontos distintos passa uma única reta?

a) Verdadeiro. b) Falso.

R: Como dois pontos distintos determinam uma única reta, verdadeiro.

5) Pontos colineares são pontos que pertencem a uma mesma reta?

a) Verdadeiro.

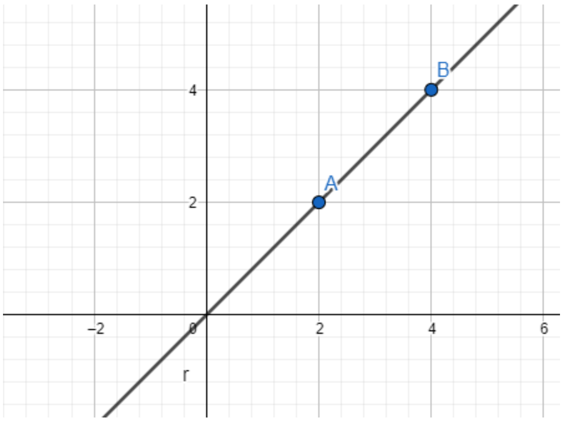
b) Falso.

R: Sim, a definição de pontos colineares são pontos que pertencem a uma mesma reta.

Após o quis será passado o conteúdo de equação geral e reduzida da reta por meio de *slides* no PowerPoint.

Conhecendo as coordenadas de dois pontos distintos de uma reta, é possível representá-la no plano cartesiano, porque dois pontos distintos determinam uma única reta. Por exemplo, dados os pontos A e B representados na Figura 1, podemos obter sua representação no plano cartesiano indicando os pontos A e B e a reta r que passa por eles. Será pedido aos alunos para que falem sobre as características da reta r, tais como em que ponto a reta corta nos eixos das abscissas e ordenadas, a diferença entre os pontos A e B e a relação existente entre um ponto e outro.

Figura 61: Pontos no plano.

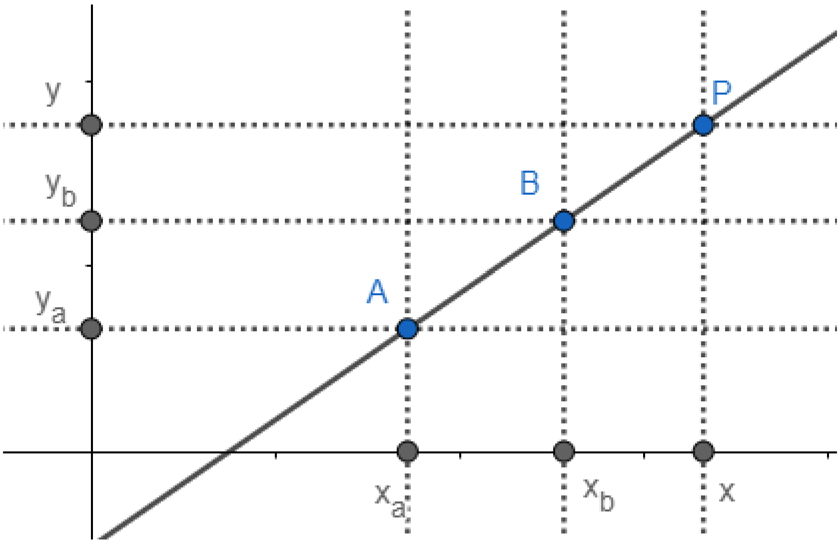


Fonte: Próprios autores.

Note que os pontos A e B possuem coordenadas cartesianas $(2,2)$ e $(4,4)$ respectivamente e a reta que passa por esses pontos passa também na origem do plano cartesiano. Desse modo, podemos notar que para qualquer ponto tomado nessa reta o valor da abscissa será igual ao valor da ordenada, ou seja $y = x$. Porém, nem sempre é fácil enxergar a relação existente entre x e y.

Em geral, é possível obter a equação de uma reta a partir de dois pontos. Dados dois pontos distintos, $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ pertencentes à uma reta r, vamos determinar uma relação entre as coordenadas de um ponto genérico $P = (x, y)$ também pertencente à reta r.

Figura 62: Relações entre os pontos A, B e P da reta.



Fonte: Próprios autores.

Sabemos que três pontos estão alinhados quando o determinante da matriz associada a esses pontos é igual a zero. Logo, devemos impor que a seguinte matriz deve ser igual a zero, uma vez que os três pontos estão na mesma reta.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow (y_a - y_b)x + (x_b - x_a)y + x_a y_b - x_b y_a = 0$$

Como nesse determinante, as únicas variáveis são x e y, os outros elementos são números reais conhecidos. Assim, podemos fazer:

$$y_a - y_b = a$$

$$x_b - x_a = b$$

$$x_a y_b - x_b y_a = c$$

Não sendo a e b simultaneamente

e nulos, obtemos a **equação geral da reta:**

$$ax + by + c = 0$$

Exemplo 1: Obter a equação geral da reta r que passa pelos pontos $A = (-1,3)$ e $B = (3,2)$.

Considere um ponto $P = (x, y)$ pertencente à reta r. Ele está alinhado com os pontos A e B. Pela condição de que os pontos devem estar alinhados para que estejam na mesma reta:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow 3x + 3y - 2 - 9 - 2x + y = 0$$

$$\Longrightarrow x + 4y - 11 = 0$$

Equação reduzida da reta

Conhecendo a equação geral de uma reta r, podemos isolar y e obter a **equação reduzida da reta**.

$$ax + by + c = 0$$

$$by = -ax - c$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Substituindo $m = -\frac{a}{b}$ e $n = -\frac{c}{b}$ temos

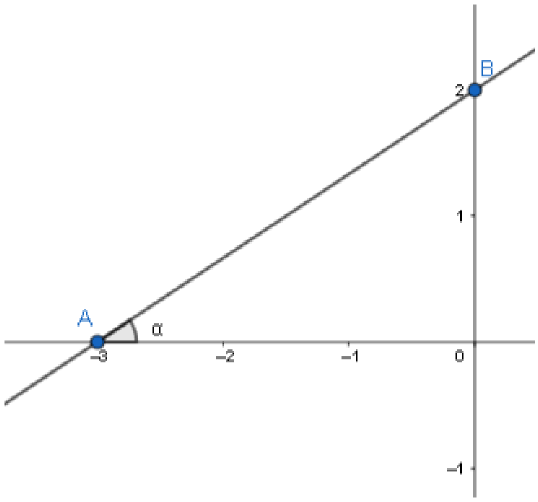
$$y = mx + n$$

Então $m = -\frac{a}{b}$ é o coeficiente angular e $n = -\frac{c}{b}$ é o coeficiente linear da reta (o coeficiente linear da reta é o valor em que a reta corta o eixo das ordenadas).

Exemplo: Se a equação geral da reta r é $8x - 4y + 12 = 0$, temos $8x - 4y + 12 = 0 \Rightarrow -4y = -8x - 12 \Rightarrow y = 2x + 3$ que é a equação reduzida da reta. Observemos que na reta $8x - 4y + 12 = 0$, em que o coeficiente angular é $m = 2 = -\frac{8}{-4}$ e o coeficiente linear é $n = 3 = -\frac{12}{-4}$.

Exemplo: Determine a equação reduzida da reta a seguir.

Figura 63: Gráfico da reta $y = 2/3\,x + 2$.



Fonte: Próprios autores.

R: vamos encontrar a inclinação da reta

$$m = tg(\alpha) = \frac{2-0}{0-(-3)} = \frac{2}{3}$$

Como a equação reduzida da reta é da forma $y = mx + n$, temos então

$$y = \frac{2}{3}x + n$$

Precisamos descobrir o coeficiente linear. Sabemos que o coeficiente linear é o valor em que a reta intercepta o eixo y, então observando o gráfico percebemos que $n = 2$, logo

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

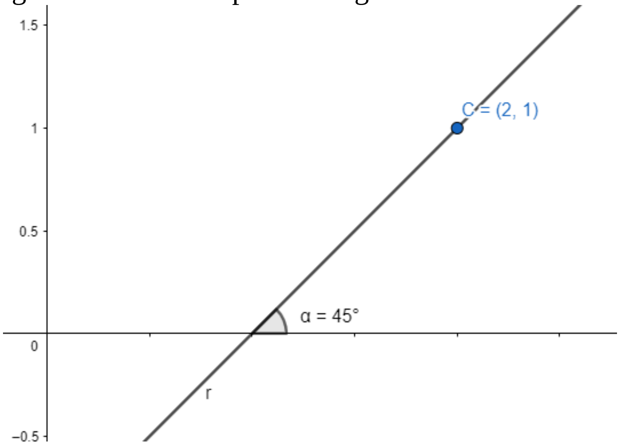
Também poderíamos descobrir o coeficiente linear substituindo um dos pontos conhecidos na equação $y = \frac{2}{3}x + n$.

Escolhendo o ponto $(-3,0)$,

$$y = \frac{2}{3}x + n \Rightarrow 0 = \frac{2}{3}(-3) + n \Rightarrow 0 = -2 + n \Rightarrow 2 = n$$

Na Figura 2, podemos analisar que a reta r que passa pelo ponto $C = (2,1)$ faz um ângulo $\alpha = 45°$ com o eixo das abscissas. O ângulo α corresponde à inclinação da reta r que passa pelo ponto C e o valor m que corresponde à tangente trigonométrica do ângulo de inclinação α da reta, ou seja, $m = tg\alpha$, é chamado de **coeficiente angular** ou **declividade** da reta.

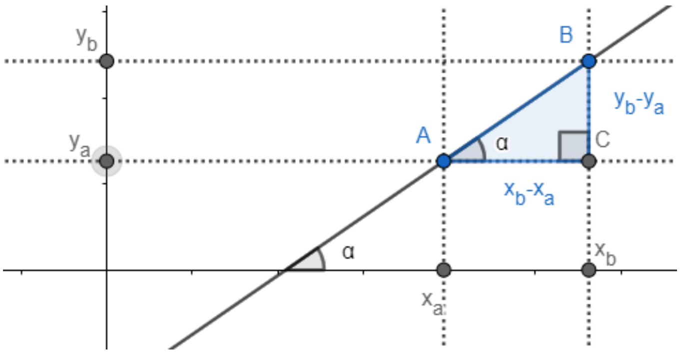
Figura 64: Reta com ponto e ângulo conhecido.



Fonte: Próprios autores.

Desse modo, se conhecermos dois pontos da reta conseguimos encontrar o coeficiente ângulo, ou seja, dada uma reta r que passe pelos pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$. Seja também o ponto $C = (x_b, y_a)$ que é a interseção da reta perpendicular ao eixo das abscissas que passa pelo ponto B e pela reta perpendicular ao eixo das ordenadas que passa pelo ponto A. uma reta s que passe por esses dois pontos (Figura 3).

Figura 65: Determinando o coeficiente angular.



Fonte: Próprios autores.

Como sabemos que o coeficiente angular m é dado por $m = tg\alpha$ e que a tangente de um ângulo α no triângulo retângulo é igual ao cateto oposto sobre o cateto adjacente, podemos determinar a $tg\alpha$ do triângulo construído onde as coordenadas de A e B são conhecidas:

$$m = tg\alpha$$

$$\Rightarrow tg\alpha = \frac{CO}{CA}$$

$$\Rightarrow tg\alpha = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

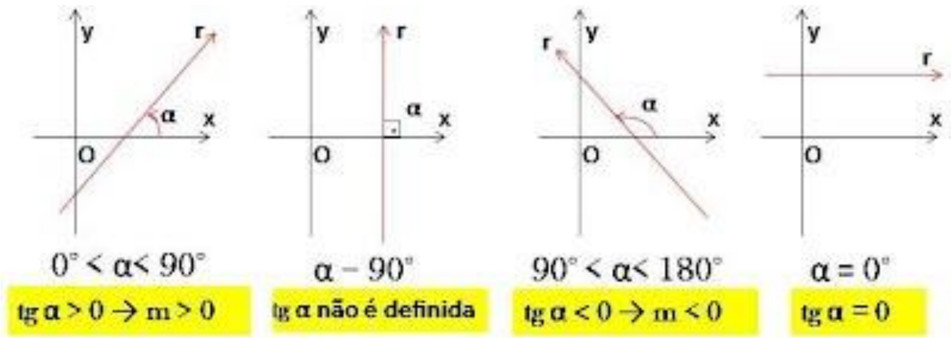
Desse modo, o coeficiente angular m corresponde à razão entre a variação das ordenadas e das abscissas:

$$m = tg\alpha = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{variação\ de\ y}{variação\ de\ x}$$

Note que por se tratar da medida da tangente,

- Quando $0 \leq \alpha < 90°$, o valor de m será maior ou igual a 0 $(m \geq 0)$;
- Quando $90° < \alpha < 180°$, m será menor que zero $(m < 0)$;
- Quando $\alpha = 90°$, m não existirá, pois não existe tangente para o ângulo de 90°;
-

Figura 66: Variações do valor do coeficiente angular.



Fonte: https://sites.google.com/site/yesmatica/3-ano/geometria-analtica/reta/aula-09

Exemplo 2: Determinar o coeficiente angular da reta r que passa pelos pontos $A = (2,3)$ e $B = (4,9)$.

O coeficiente angular é dado por:

$$m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{9-3}{4-2} = \frac{6}{2} = 3$$

Logo, o coeficiente angular é igual a 3.

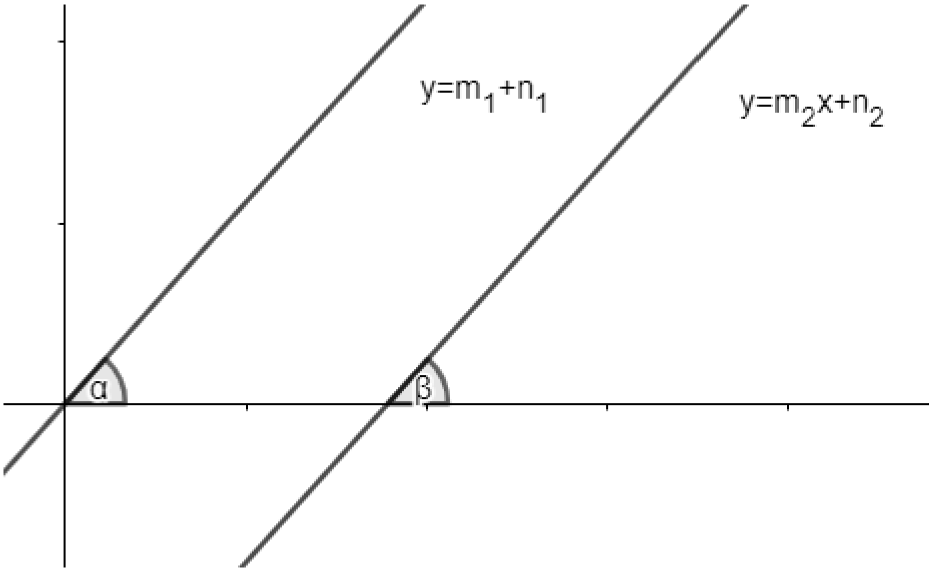
Posições relativas entre duas retas no plano

Duas retas distintas r e s contidas em um mesmo plano são paralelas ou concorrentes.

Duas retas são **paralelas** se e somente se seus coeficientes angulares são iguais. Isto significa que possuem mesma inclinação. Logo, duas retas paralelas não possuem nenhum ponto em comum.

Seja r uma reta com equação $y = m_1x + n_1$ e s uma reta com equação $y = m_2x + n_2$, se r e s são paralelas então, $m_1 = m_2$.

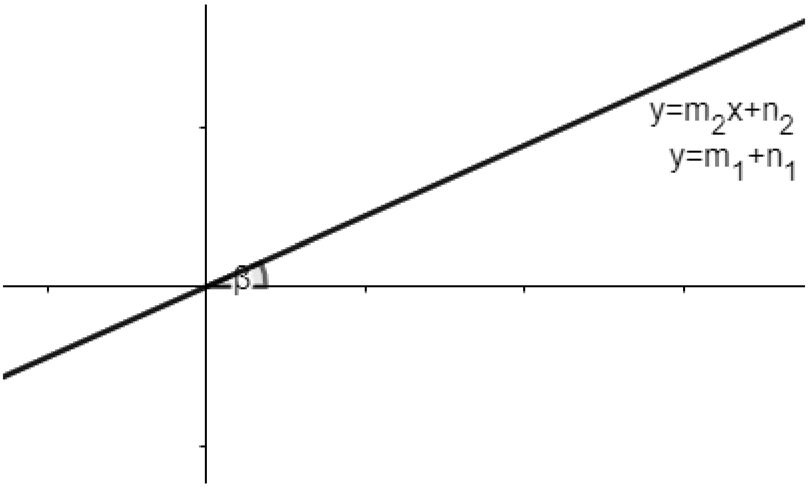
Figura 67: Retas paralelas.



Fonte: Próprios autores.

Se, além do mesmo coeficiente angular, elas tiverem também o mesmo coeficiente linear, ou seja, $n_1 = n_2$, então são ditas retas **coincidentes**.

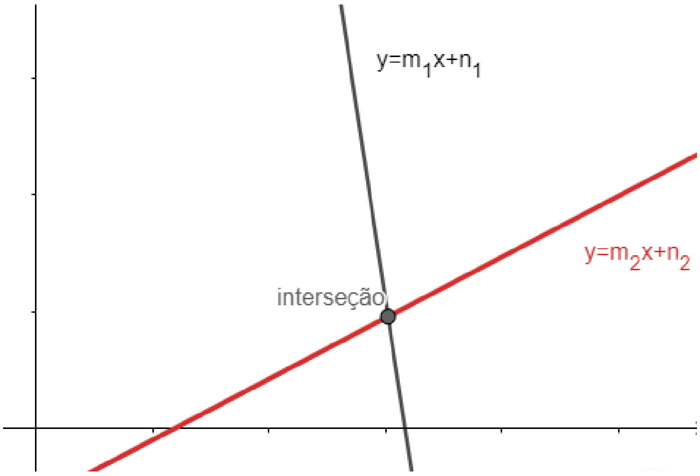
Figura 68: Retas coincidentes.



Fonte: Próprios autores.

Duas retas distintas contidas no mesmo plano são **concorrentes** se, e somente se, seus coeficientes angulares são diferentes. Duas retas concorrentes possuem um único ponto em comum.

Figura 69: Retas concorrentes.



Fonte: Próprios autores.

Este ponto em comum é a interseção das duas retas e satisfaz as equações dessas retas. Logo, para determinar a interseção, basta resolver o sistema formado pelas equações das duas retas.

Exemplo: Determine as coordenadas do ponto P que é interseção das retas r e s, de equações $r: 3x + 2y - 7 = 0$ e $s: x - 2y - 9$.

R: Basta resolver o sistema formado pelas duas equações.

$$3x + 2y - 7 = 0$$

$$x - 2y - 9 = 0$$

$$4x - 16 = 0 \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4$$

Substituindo $x = 4$ na segunda equação temos

$$4 - 2y - 9 = 0 \Rightarrow -2y - 5 = 0 \Rightarrow -2y = 5 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}$$

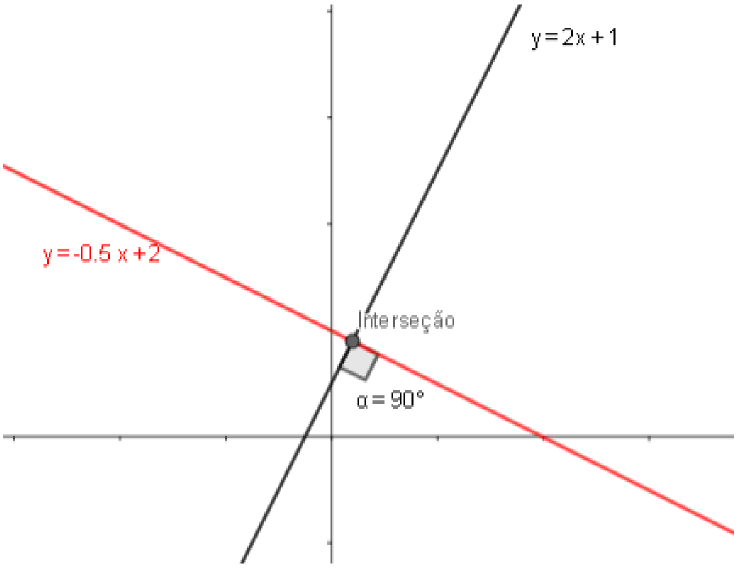
Logo, as coordenadas dos pontos de interseção são $x = 4$ e $y = -\frac{5}{2}$, ou seja, $P = (4, -\frac{5}{2})$.

Retas Perpendiculares

Duas retas perpendiculares contidas em um mesmo plano são retas concorrentes e formam entre si um ângulo reto.

Seja r uma reta com equação $y = m_1x + n_1$ e s uma reta com equação $y = m_2x + n_2$, se r e s são perpendiculares então, $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

Figura 70: Retas perpendiculares.



Fonte: Próprios autores.

1) (UFPA) Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $P = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$ e é perpendicular a uma reta que forma com o sentido positivo do eixo do x um ângulo cuja tangente é $\frac{5}{2}$.

R: Queremos encontrar uma reta r que passa por ponto $P = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$ e é perpendicular a uma reta s que forma com o sentido positivo do eixo do x um ângulo cuja tangente é $\frac{5}{2}$, ou seja, a inclinação de s é $\frac{5}{2}$.

$$m_2 = \frac{5}{2}$$

Sendo m_1 a inclinação de r, como r e s são perpendiculares, então

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \Rightarrow \frac{5}{2} = -\frac{1}{m_1} \Rightarrow \frac{5m_1}{2} = -1 \Rightarrow 5m_1 = -2 \Rightarrow m_1 = -\frac{2}{5}$$

Temos então o coeficiente angular da reta r, e sua equação

$$y = -\frac{2}{5}x + b$$

Substituindo $P = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$ na equação da reta para encontrar o coeficiente linear

$$-1 = -\frac{2}{5}\frac{1}{2} + b \Rightarrow -1 = -\frac{1}{5} + b \Rightarrow -1 + \frac{1}{5} = b \Rightarrow -\frac{4}{5} = b$$

Logo, a equação da reta r é $y = -\frac{2}{5}x - \frac{4}{5}$.

Atividade prática do plano cartesiano

Será aplicado uma dinâmica com os alunos, reaproveitando a divisão dos grupos feito para o quis no Quizizz. A atividade consiste em um plano cartesiano de grande dimensão feito sobre um tecido de TNT (Figura X NA VERDADE COLOCAR UMA MONTAGEM DO PLANO COM A CAIXA). Um aluno de cada grupo irá pegar dois dados dentro da caixa apresentada na figura X, primeiro ele lança um dado e o número que cair virado para cima será o valor da coordenada no eixo das abcissas do primeiro ponto, em seguida o segundo dado é jogado e dessa vez o número voltado para cima será o valor da coordenada do eixo das ordenadas desse mesmo ponto. Após isso, o aluno pega mais dois dados na caixa e repete o processo descobrindo as coordenadas do segundo ponto. Então é marcado com uma peça redonda colorida de madeira cada ponto no plano cartesiano disposto no chão da sala. Outro ponto importante a ser destacado é que na caixa há quatro dados, sendo um tradicional, outro com os inteiros negativos de -1 até -6, os dois dados que sobraram possuem números como o $0,7$ e alguns dos já presentes no dado tradicional e de inteiros negativos.

Com essas informações os grupos devem calcular a equação geral e reduzida da reta. Enquanto isso os professores auxiliam os grupos caso necessário na descoberta dessas equações.

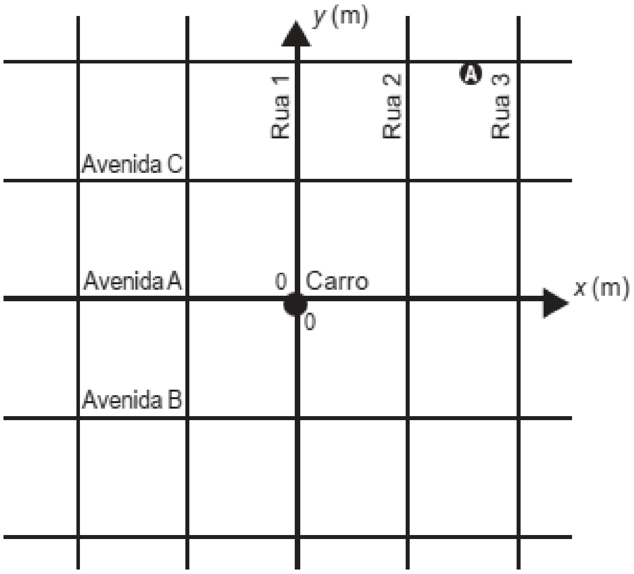
Terminada e corrigida a atividade, entregaremos impresso para os alunos os exercícios a seguir:

Exercícios:

2) (Enem (2022)) Uma moça estacionou seu carro na interseção da Rua 1 com a Avenida A. Ela está hospedada em um hotel na Rua 3, posicionado a exatos 40 metros de distância da Avenida A, contados a partir da Avenida A em direção à Avenida B.

No mapa está representado um plano cartesiano cujo eixo das abscissas coincide com a Avenida A e o das ordenadas, com a Rua 1, sendo a origem (0, 0) o local onde se encontra estacionado o veículo. Os quarteirões formados pelos cruzamentos dessas vias formam quadrados de lados medindo 100 m.

Figura 71: Esquema das ruas.



A ordenada do ponto que representa a localização do hotel é:

a)

b)

c)

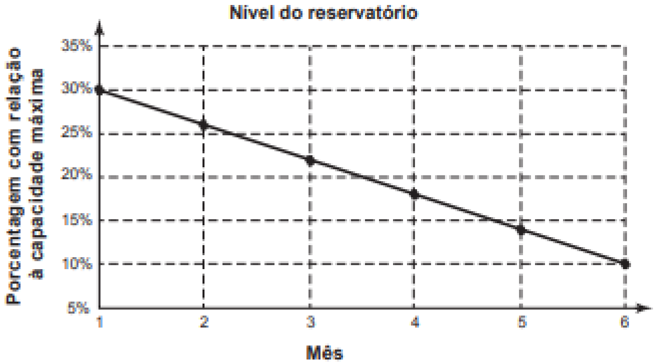
d)

e)

R: O veículo se encontra estacionado na origem do sistema cartesiano, note que a distância da Rua 1 para a Rua 2 é de 100 metros e da Rua 2 para a Rua 3 é a mesma distância, portanto da Rua 1 até a rua 3 a distância é de 200 metros, ou seja, como o hotel está na Rua 3 o valor da abcissa será 200. Para descobrir o valor da ordenada temos a informação de que o hotel está a 40 metros do Avenida A (eixo das abcissas do plano cartesiano) em direção à Avenida B, logo está indo para o lado negativo do eixo das ordenadas, portanto, temos que as coordenadas do hotel são $H = (200, -40)$. Logo é a alternativa b).

3) (ENEM 2016) Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.

Figura 72: Nível do reservatório.



Fonte: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/2016_PV_impresso_D2_CD5.pdf . Acesso em: 10 jun. 2022.

Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

a) 2 meses e meio.

b) 3 meses e meio.

c) 1 mês e meio.

d) 4 meses.

e) 1 mês.

R: Pelo gráfico, conhecemos dois pontos da reta $A = (6{,}10)$ e $B = (1{,}30)$, então podemos determinar sua equação $y = ax + b$:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{30-10}{1-6} = \frac{20}{-5} = -4.$$

Assim, $y = -4x + b$, substituindo $A = (6{,}10)$, nesta equação temos,

$$10 = -4 \times 6 + b \Rightarrow b = 10 + 24 = 34.$$

Logo, temos a equação $y = -4x + 34$.

Para $y = 0$, temos

$$0 = -4x + 34 \Rightarrow 4x = 34 \Rightarrow x = \frac{34}{4} \Rightarrow x = 8{,}5.$$

Assim, o tempo mínimo após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade é

$$8{,}5 - 6 = 2{,}5 \text{ meses.}$$

Letra a).

Referências

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante Matemática 3.** São Paulo: Edições SM, 2016.

MODERNA, E. **Conexões com a matemática.** 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013.

DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. São Paulo: Editora ática, 2016.

POSIÇÔES relativas de retas no plano cartesiano. **GeoGebra**. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/v8bTRwvp. Acesso em: 10 jun. 2022.

PROVA DO ENEM 2016. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/2016_PV_impresso_D2_CD5.pdf . Acesso em: 10 jun. 2022.

https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/disciplinas/matematica-matematica/geometria-analitica/questoes

GEOMETRIA analítica. **Só Ensino**. Disponível em: http://www.soensino.com.br/foruns/viewtopic.php?f=5&t=28547. Acesso em: 10 jun. 2022.

2.7.2 Relatório encontro 5

No dia 11 de junho realizamos o quinto encontro do segundo semestre do PROMAT. Neste dia estavam presentes 8 alunos. Iniciamos a aula com o Quiz. Comentamos que as questões seriam sobre o conteúdo do vídeo disponibilizado. Os alunos formaram três grupos e começaram a atividade.

Finalizado o Quiz fizemos a correção das questões no quadro. A primeira questão pedia o ponto médio do segmento AB, cujo $A = (2, 5)$ e $B = (-7,1)$. Retomamos a forma de calcular o ponto médio de um segmento e realizamos a conta obtendo como resposta o ponto $M = (-2{,}5, 3)$. A segunda questão apresentava quatro pontos e perguntava em quais quadrantes cada um pertencia. Retomamos os quadrantes no plano cartesiano para mostrar que pertenciam ao 3°, 4°, 1° e 2° quadrantes, respectivamente. Na terceira questão era necessário calcular a distância entre os pontos $A = (6{,}8)$ e $B = (2{,}5)$, então resolvemos por meio da fórmula da distância evidenciada na aula gravada disponibilizada no Youtube. A última questão perguntava se por dois pontos distintos passa uma única reta, dizemos que sim pois dois pontos distintos determinam uma única reta. Em geral, os alunos conseguiram responder todas as questões do Quiz, em que a pergunta que houve mais dificuldade foi a de número 3.

Em seguida começamos o conteúdo. Para introduzir a equação geral de uma reta mostramos nos slides dois pontos A e B e a reta que passava por eles e pedimos algumas características. Os alunos reconheceram que era o gráfico de uma função afim, um dos alunos comentou que sempre acontecia $x = x$, outro aluno comentou que a coordenada x dos dois pontos era positiva. Explicamos então que a reta realmente representava o gráfico de uma função afim, mas que quando falamos de equação da reta não estamos falando de função, por mais que algumas ideias podem ser adaptadas, então mencionamos que nem toda reta é uma função e demos o exemplo de uma reta perpendicular $x = 2$. Relembramos a definição de função, mostrando que um valor do domínio só pode ter uma correspondente na imagem, o que não ocorria nas retas perpendiculares aos eixos das abcissas.

Após isso, falamos que em geral, é possível obter a equação de uma reta a partir de dois pontos. Para isso, mostramos três pontos colineares $A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b)$ e um ponto genérico $P = (x, y)$. Destacamos que três pontos estão alinhados quando o determinante da matriz associada a esses pontos é igual a zero. Por isso igualamos o determinante dos pontos A, B e P a zero, falamos também que era necessário adicionar uma terceira coluna unitária para calcular. Então foi explicado como fazer determinante pela regra de Sarrus e isolamos a variável x e y do ponto P, chegando na fórmula da equação geral da reta. Comentamos que o que havíamos acabado de fazer foi uma demonstração da equação geral da reta, e por isso as coordenadas dos pontos conhecidos eram incógnitas. Mas ao fazer com coordenadas numéricas o processo se tornava menos confuso.

Então para fixar e sanar dúvidas de tal procedimento, fizemos um exemplo com os pontos $A = (-1, 3)$ e $B = (3, 2)$. Auxiliamos os alunos nas carteiras, nem todos os alunos sabiam calcular determinante de matriz. Então resolvemos, montando a matriz com as coordenadas no quadro e calculamos o determinante. Explicamos que só podemos calcular determinante de matriz quadrada e por isso adicionávamos uma terceira coluna unitária, pois assim não alterávamos o valor do determinante e se tornava possível calculá-lo. Realizado as contas, encontramos a equação geral da reta que passava por esses três pontos, no caso, $x + 4y - 11 = 0$. Um aluno perguntou o que o c interfere na equação, comentamos que o c influencia no gráfico da reta e veríamos isto detalhadamente a seguir.

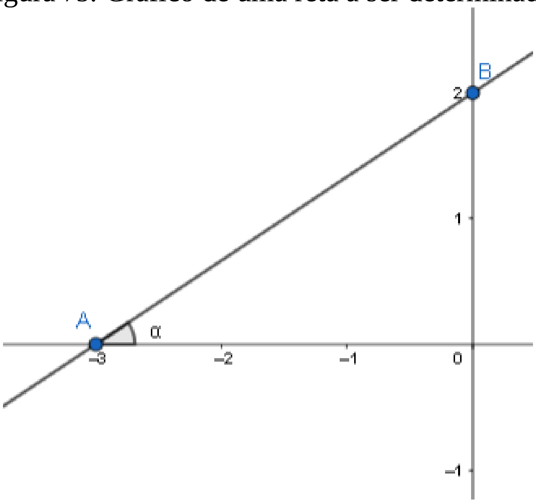
Então partimos para a explicação de equação reduzida de uma reta. Conhecendo a equação geral, explicamos que podemos isolar o y e obter a equação reduzida. Sendo $ax + by + c = 0$ a equação geral de uma reta r, isolando y obtemos $by = -ax - c$, dividindo ambos os lados da equação $y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$. Para simplificar, explicamos que poderia ser renomeados os coeficientes angular e linear como m e n, respectivamente, logo, a equação reduzida da reta seria da forma $y = mx + n$.

Para mostrar o coeficiente angular e o coeficiente linear foi mostrada a equação de uma reta no Geogebra e foi alterado os valores de tais coeficientes e pedimos o que influenciava na reta, os alunos perceberam que ao altera o coeficiente angular mudava a inclinação da reta, e ao alterar o coeficiente linear, os alunos perceberam que a reta cortava em lugares diferentes o eixo das ordenadas, porém a inclinação da reta não variava.

Em seguida, pedimos aos alunos para encontrarem a equação reduzida da reta obtida no exemplo anterior que era $x + 4y - 11 = 0$ com o intuito de observar os coeficientes dessa reta no Geogebra. Os alunos encontraram que a equação reduzida era $y = \frac{-x+11}{4}$. Com isso, plotamos essa reta no geogebra, o que permitiu que fosse observado que o coeficiente angular da reta era negativo resultando em uma reta decrescente no gráfico.

Resolvemos mais um exemplo de equação reduzida a partir da equação geral $8x - 4y + 12 = 0$. Após isso mostramos o gráfico de uma reta (Figura 54) e pedimos que encontrassem a equação reduzida. Para isso, os alunos encontraram primeiro a equação geral da reta através do determinante da matriz associadas aos pontos A e B conhecidos no gráfico e então fizeram a equação reduzida. Durante a realização do exercício passamos nos grupos tirando dúvidas e auxiliando nos cálculos.

Figura 73: Gráfico de uma reta a ser determinada.



Fonte: Próprios autores.

Em seguida, construímos a definição de coeficiente angular a partir da definição da tangente em um triângulo retângulo e explicamos que o coeficiente angular poderia ser expresso pela divisão da variação de y pela variação de x de dois pontos conhecidos da reta. Um dos alunos pediu se a variação não poderia ser representada pelo símbolo delta e explicamos que poderia, pois, a definição de delta significa a variação de uma variável entre um ponto e outro.

Foi explicado também sobre as variações do coeficiente angular m que, por se tratar da medida da tangente, o sinal do coeficiente acompanharia o sinal da tangente do ângulo α

formado entre a reta e o eixo das abscissas, logo m seria maior ou igual a zero se $0 \leq \alpha < 90°$, m seria menor que zero se $90 < \alpha < 180°$ e não existiria valor para m quando $\alpha = 90°$, pois formaria uma reta paralela ao eixo das ordenadas e não há tangente para o ângulo de 90°. Após as explicações foi passado um exemplo de como determinar a mesma reta ilustrada pelo gráfico da Figura 54 encontrando os coeficientes primeiro.

Para isso, foi encontrado primeiro o coeficiente angular chegando na equação da reta $y = \frac{2}{3}x + n$. Então foi comentado que o coeficiente linear, nesse caso, poderia ser determinado olhando no gráfico, pois um dos pontos conhecidos era o ponto em que a reta cortava o eixo y que no caso era o ponto de coordenadas $(0,2)$. Foi explicado que também é possível encontrar o coeficiente linear substituindo um dos pontos conhecidos na fórmula encontrada. Logo, foi substituído o ponto $(-3,0)$ na equação $y = \frac{2}{3}x + n$.Um dos alunos pediu se haveria diferença caso escolhesse o outro ponto conhecido para substituir e encontrar o coeficiente linear. Foi explicado que não haveria diferença e, também foi feita a substituição do ponto $(0,2)$ na equação reta, o que facilitou demonstrar que sempre que o valor da abscissa for zero, o coeficiente linear será sempre o valor em que a reta corta o eixo y.

Em seguida foi dado um exercício para eles calcularem o coeficiente angular de uma reta dados dois pontos conhecidos. Os alunos conseguiram resolver esse exercício rapidamente. Poucos alunos tiveram dúvidas e necessitaram de auxílio.

Seguindo a aula, explicamos as posições relativas entre duas retas contidas em um plano. Duas retas distintas contidas em um mesmo plano podem ser paralelas ou concorrentes. Nos slides, primeiro passamos a definição de retas paralelas. Reforçamos a ideia de que se duas retas são paralelas, então seus coeficientes angulares são iguais, o que significa que possuem mesma inclinação, logo duas retas paralelas não possuem nenhum ponto em comum. Então mostramos uma imagem com duas retas paralelas. Se além do coeficiente angular, também forem iguais seus coeficientes lineares, então as retas são coincidentes.

Em seguida, passamos a definição de retas concorrentes. Duas retas concorrentes possuem um único ponto em comum e seus coeficientes angulares são diferentes. Depois da definição mostramos nos slides o gráfico de duas retas concorrentes. Comentamos que o ponto de interseção satisfaz as equações das duas retas. Então para encontrá-lo basta resolver o sistema linear formado pelas duas equações das duas retas. Para exemplificar, determinamos as coordenas do ponto P que é interseção das retas r e s, de equações $r: 3x + 2y - 7 = 0$ e

$s: x - 2y - 9$. Montamos o sistema e resolvemos pelo método da adição, obtendo $P = (4, -\frac{5}{2})$.

Após isso, passamos a definição de retas perpendiculares. Duas retas perpendiculares são retas concorrentes e formam entre si um ângulo reto. Tendo o coeficiente angular de uma das retas, podemos obter o coeficiente angular da outra reta a partir da relação $m_2 = -\frac{1}{m_1}$. Então mostramos o gráfico de duas retas perpendiculares $y = 2x + 1$e $y = -0{,}5x + 2$, e que a relação entre os coeficientes angulares é satisfeita, $-0{,}5 = -\frac{1}{2}$. Por fim, deixamos um exercício para fazerem em casa. O exercício pedia para escrever a equação da reta que passa pelo ponto $P = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$ e é perpendicular a uma reta que forma com o sentido positivo do eixo do x um ângulo cuja tangente é $\frac{5}{2}$. Conversamos sobre o exercício com os alunos rapidamente, destacando os pontos mais importantes e dando algumas dicas de quais seriam os raciocínios necessários para resolver a questão e assim terminamos a aula. Também deixamos como lista de casa os outros exercícios preparados no plano.

2.8 Módulo/encontro 6 -

2.8.1 Plano de aula

PLANO DE AULA

Conteúdo: Geometria analítica.

Público-Alvo: Alunos egressos da Rede Pública de Ensino CASCAVEL, inscritos no projeto.

Objetivo geral: Introduzir os conceitos de equação geral e reduzida da circunferência e posições relativas envolvendo ponto, reta e circunferência.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com geometria analítica, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar uma circunferência;
- Compreender a equação geral e reduzida de uma circunferência;
- Diferenciar as posições relativas entre ponto e circunferência, reta e circunferência e entre duas circunferências.
- Resolver exercícios envolvendo os conceitos estudados.

Tempo de execução: 3 horas e 40 minutos.

Recursos didáticos: PowerPoint,

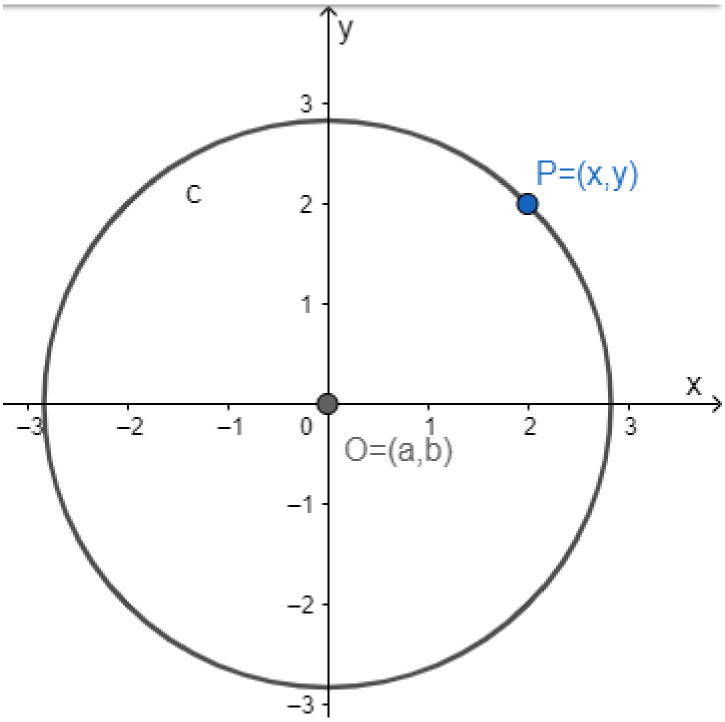
Encaminhamentos metodológicos: Inicialmente serão mostradas em slides no PowerPoint algumas imagens de objetos do cotidiano que possuem o formato de uma circunferência. Será pedido aos alunos o que essas imagens têm em comum. As imagens serão:

Figura 74: Objetos com formato circular.

Fonte: https://escolaeducacao.com.br/plano-de-aula-formas-geometricas-planas-ensino-fundamental/

Em seguida, será pedido aos alunos como podemos determinar uma circunferência no plano cartesiano. Para auxiliá-los, será mostrada a Figura 2 que representa uma circunferência no plano.

Figura 75: Circunferência no plano dado o centro e um ponto.



Fonte: Próprios autores.

Após as discussões das respostas, vamos apresentar a definição de uma circunferência.

Equação geral e reduzida da circunferência

Uma **circunferência** com centro em $O = (a, b)$ e raio r é o conjunto de todos os pontos $P = (x, y)$ do plano, equidistantes de O, ou seja:

$$d(O, P) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Podemos elevar os dois lados da igualde acima ao quadrado, obteremos então

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Esta é a **equação reduzida** de uma circunferência.

Exemplo 1: Determine a equação reduzida da circunferência com centro em $O = (-3,1)$ e raio 3.

R: Neste caso temos, $a = -3$, $b = 1$ e $r = 3$, logo

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 3$$

Ao desenvolver a equação reduzida da circunferência, podemos obter sua **equação geral**:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$$
$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2-r^2=0$$

Reorganizando a equação obtemos

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

Exemplo 2: Determine a equação geral da circunferência do exemplo 1.

$$(x+3)^2+(y-1)^2=3$$
$$x^2+6x+9+y^2-2y+1=3$$
$$x^2+y^2+6x-2y+7=0$$

É comum encontrarmos as circunferências representadas por suas equações gerais. Mas, vejamos que não identificamos de imediato o centro e o raio apenas com a equação na forma $x^2+y^2++6x-2y+7=0$. Vejamos um método para obter o centro e o raio a partir da equação geral.

Método de completar quadrados

Nesse método, o objetivo é completar os quadrados perfeitos $(x-a)^2$ e $(y-b)^2$.

Vejamos como este método funciona com a equação $x^2+y^2-2x+4y-4=0$.

1. Primeiro agrupamos na equação os termos em x e os termos em y, isolando no outro membro da equação o termo independente. Também vamos deixar um espaço para preencher com os termos independentes de cada quadrado perfeito.

$$x^2-2x+\ \_\_\_+y^2+4y+\ \_\_\_\ =\ +4\ +\_\_\_+\_\_\_$$

2. Agora, para completar os quadrados, observemos o produto notável desenvolvido

$$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$$

Assim, percebemos que na nossa equação falta o termo a^2. Para encontrá-lo, dividimos o coeficiente em x por -2 e depois elevamos ao quadrado.

$\frac{-2a}{-2}\Rightarrow a$, elevando ao quadrado obtemos a^2.

Vamos fazer isto na equação dada.

$$\frac{-2}{-2} = 1\text{, elevando ao quadrado } 1^2 = 1.$$

Então somamos 1 na equação.

$$x^2 - 2x + \mathbf{1} + y^2 + 4y + \_\_\_ = +4 + \mathbf{1} + \_\_\_$$

3. Fazemos o mesmo para completar o quadrado em y. Observemos o produto notável desenvolvido

$$(y - b)^2 = y^2 - 2by + b^2$$

Assim, percebemos que na nossa equação falta o termo b^2. Para encontrá-lo, dividimos o coeficiente em y por -2 e depois elevamos ao quadrado.

$$\frac{-2b}{-2} \Rightarrow b\text{, elevando ao quadrado obtemos } b^2.$$

Vamos fazer isto na equação dada.

$$\frac{4}{-2} = -2\text{, elevando ao quadrado } (-2)^2 = 4.$$

Então somamos 4 na equação.

$$x^2 - 2x + \mathbf{1} + y^2 + 4y + \mathbf{4} = -4 + \mathbf{1} + \mathbf{4}$$

4. Agora podemos escrever a equação na forma reduzida. Vejamos que $a = 1$ e $b = -2$.

$$(x - 1)^2 + \big(y - (-2)\big)^2 = 9$$

$$(x - 1)^2 + \big(y - (-2)\big)^2 = 3^2$$

Assim, podemos observar que o centro desta circunferência é $C = (1, -2)$ e o raio é $r = 3$.

Exercício 1: Obtenha a equação $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0$ na forma reduzida.

R:

$$x^2 - 4x + \quad + y^2 - 8y + \quad = -19 + \quad +$$

Vamos completar os quadrados em x ey.

$$\frac{-4}{-2} = 2 = a \text{ e } 2^2 = 4 = a^2$$
$$\frac{-8}{-2} = 4 = b \text{ e } 4^2 = 16 = b^2$$

Somando os valores na equação

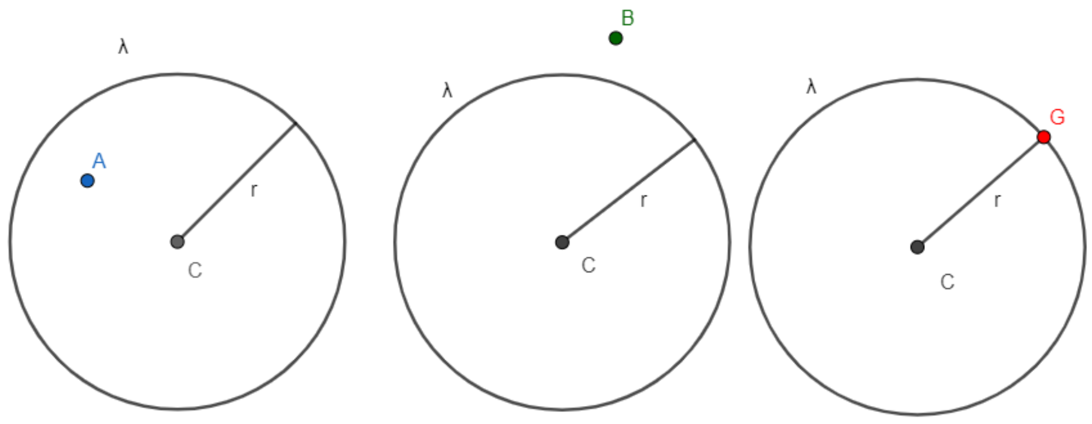
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = -19 + 4 + 16$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 1$$
$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 1^2$$

Posições relativas envolvendo ponto, circunferência e reta

Posição Relativa entre um ponto e uma circunferência:

As possíveis posições de um ponto $P(x, y)$ do plano em relação a uma circunferência λ de centro C e raio r são: exterior, interior ou pertencente à circunferência. Serão mostradas as circunferências da Figura 3 e será pedido aos alunos que classifiquem os pontos.

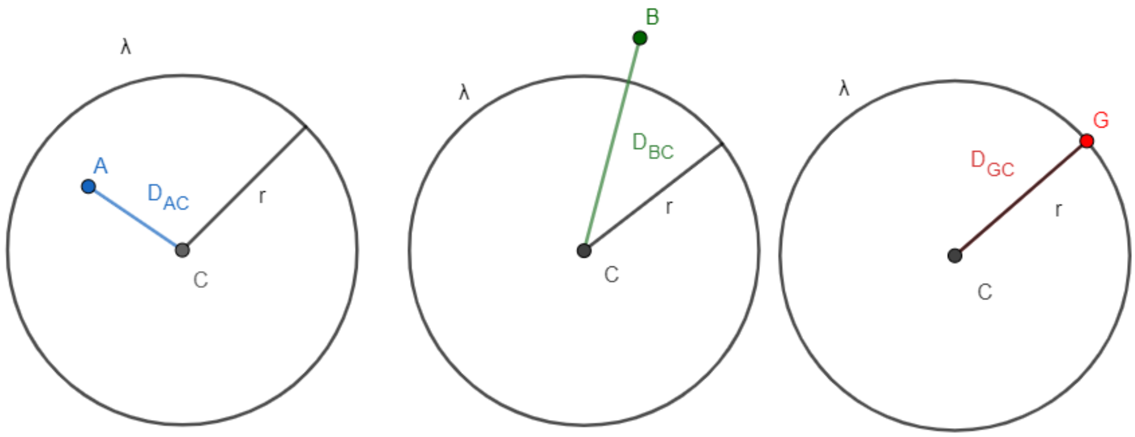
Figura 76: Relação entre pontos e circunferência.



Fonte: Próprios autores.

Espera-se que eles percebam que os pontos estão classificados em interno, externo e pertencente, respectivamente. Após a discussão, serão analisadas as distâncias desses pontos até a origem da circunferência. Para isso, serão mostradas as seguintes imagens da Figura 4 aos alunos e pedido para que eles comentem sobre as distâncias representadas nas figuras.

Figura 77: Distâncias entre os pontos e o centro.



Fonte: Próprios autores.

Analisando as figuras, percebe-se que para o ponto interior, a distância entre o ponto A e o centro C é menor do que o raio r. O contrário ocorre para o ponto exterior, ou seja, a distância entre o ponto B e o centro C é maior do que o raio r. Para o ponto G, a distância entre esse ponto e o centro tem o mesmo valor que o raio r, uma vez que esse ponto pertence à circunferência. Logo, podemos classificar essas distâncias como:

- **Ponto Interior:** Para um ponto $A = (x_A, y_A)$, interno à circunferência λ que possui raio r e centro em $C = (a, b)$. A é interior à circunferência se, e somente se, $D_{AC} < r$, ou seja,

$$D_{AC} = \sqrt{(x_A - a)^2 + (y_A - b)^2} < r$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x_A - a)^2 + (y_A - b)^2}\right)^2 < r^2$$
$$\Rightarrow (x_A - a)^2 + (y_A - b)^2 < r^2$$
$$\Rightarrow (x_A - a)^2 + (y_A - b)^2 - r^2 < 0$$

- **Ponto Exterior:** Para um ponto $B = (x_B, y_B)$, externo à circunferência λ que possui raio r e centro em $C = (a, b)$. A é exterior à circunferência se, e somente se, $D_{BC} > r$, ou seja,

$$D_{BC} = \sqrt{(x_B - a)^2 + (y_B - b)^2} > r$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x_B - a)^2 + (y_B - b)^2}\right)^2 > r^2$$
$$\Rightarrow (x_B - a)^2 + (y_B - b)^2 > r^2$$

$$\Longrightarrow (x_B - a)^2 + (y_B - b)^2 - r^2 > 0$$

- **Ponto Pertencente:** Para um ponto $G = (x_G, y_G)$, pertencente à circunferência λ que possui raio r e centro em $C = (a, b)$. A é pertencente à circunferência se, e somente se, $D_{GC} = r$, ou seja,

$$D_{GC} = \sqrt{(x_G - a)^2 + (y_G - b)^2} = r$$

$$\Longrightarrow \left(\sqrt{(x_G - a)^2 + (y_G - b)^2}\right)^2 = r^2$$

$$\Longrightarrow (x_G - a)^2 + (y_G - b)^2 = r^2$$

$$\Longrightarrow (x_G - a)^2 + (y_G - b)^2 - r^2 = 0$$

Exemplo: Determine a posição do ponto $P = (1,5)$ em relação à circunferência de equação $x^2 + (y - 2)^2 = 9$

Podemos observar que o raio dessa circunferência é 3, pois $3^2 = 9$. Outro fato a ser observado é que o centro C dessa circunferência possui coordenadas $C = (0,2)$. Desse modo, para saber a posição do ponto P, basta calcular a distância do ponto P até a origem.

$$D_{PC} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (5 - 2)^2}$$

$$\Longrightarrow D_{PC} = \sqrt{1^2 + 3^2}$$

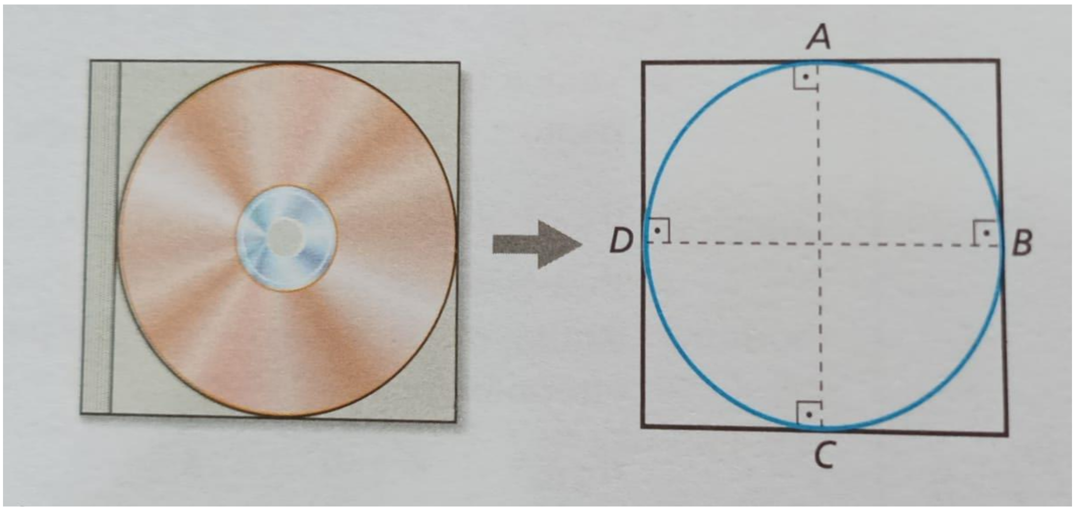
$$\Longrightarrow D_{PC} = \sqrt{10}$$

Comparando a distância encontrada com o raio, observa-se que $\sqrt{10} > 3$. Logo, o ponto P é externo à circunferência.

Posição relativa entre uma reta e uma circunferência

Será pedido aos alunos que observem a Figura 5 e analisem a posição das bordas da caixa em relação ao CD. Espera-se que eles observem que as bordas tangenciam em um único ponto o CD. Logo, se imaginarmos retas passando pelas bordas podemos dizer que essas retas são tangentes à circunferência.

Figura 78: Representação analítica da caixa e do CD.



Fonte: MODERNA, 2013, p. 132.

Em seguida, será mostrada a Figura 6 e será pedido aos alunos qual é a posição das cordas em relação à boca do violão. Espera-se que eles percebam que as cordas passam dentro da circunferência representada pela boca do violão, logo, passa por dois pontos da circunferência.

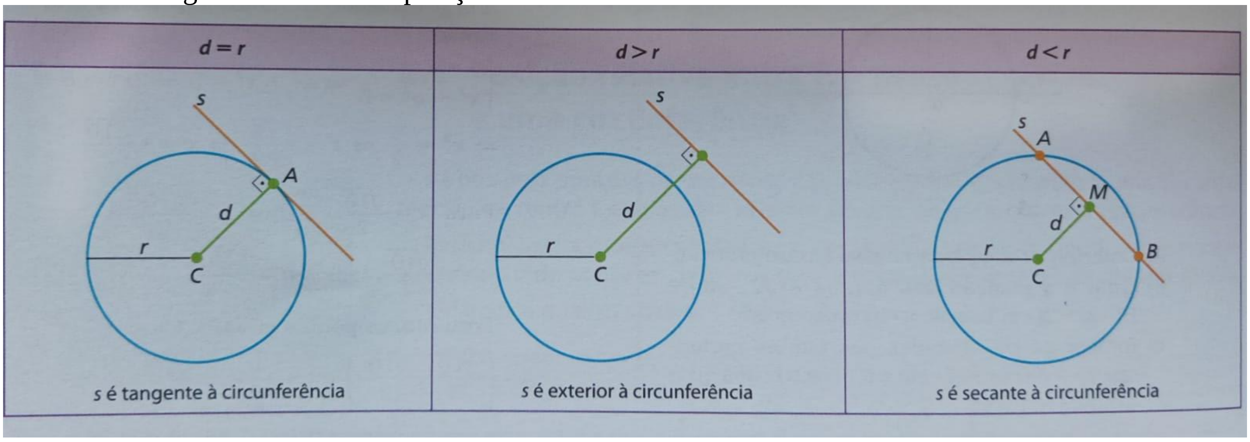
Figura 79: Violão com as cordas secantes à circunferência da boca do violão.

Fonte: https://similimusica.com.br/violao-yamaha-concerto-fsta-transacustic-natural.html

Após observar esses objetos do cotidiano, serão passadas as definições das posições relativas entre uma reta e uma circunferência.

Dadas uma reta s e uma circunferência λ de centro $C = (x_0, y_0)$ e raio r, ambas no mesmo plano, há três casos possíveis para a posição relativa entre s e λ (Figura 7):

Figura 80: Possíveis posições relativas entre uma reta e uma circunferência.



Fonte: MODERNA, 2013, p. 132.

Para calcular a distância d entre o centro C da circunferência e uma reta s, utilizamos a fórmula:

$$d_{C,s} = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

Após o cálculo da distância entre o centro C da circunferência e a reta s e analisando os três possíveis casos ilustrados na imagem, concluímos que:

- Se $d = r$, então $s \cap \lambda = \{A\}$, ou seja, s é tangente à circunferência λ quando a reta intersectar apenas **um** ponto na circunferência;
- Se $d > r$, então $s \cap \lambda = \emptyset$, ou seja, s é exterior à circunferência λ quando a reta intersectar em **nenhum** ponto na circunferência;
- Se $d < r$, então $s \cap \lambda = \{A, B\}$, ou seja, s é secante à circunferência λ quando a reta intersectar **dois** pontos na circunferência.

Exemplo: Determinar a posição relativa entre a reta s de equação $x + y + 1 = 0$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$.

Primeiro, vamos obter o centro e o raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$. Comparando-a com a equação geral da reta:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2bx + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Como $-2a = 2$, então, $a = -1$. Da mesma forma, como $-2b = 2$, então, $b = -1$. Logo, a circunferência possui centro $C = (-1, -1)$.

Substituindo $a = b = -1$ em $a^2 + b^2 - r^2 = 1$, obtemos $r = 1$.

Agora vamos calcular a distância do centro da circunferência à reta s.

$$d_{C,s} = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

$$\Rightarrow d_{C,s} = \left|\frac{1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right|$$

$$\Rightarrow d_{C,s} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow d_{C,s} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $d_{C,d} < r$, então, a reta s é secante à circunferência.

Posição relativa entre duas circunferências

Neste momento será apresentado nos slides a teoria a seguir, e conforme for decorrendo as explicações, será utilizado um material do Geogebra sobre posições relativas entre circunferências disponível no link https://www.geogebra.org/m/zvaja9dv#:~:text=Considerando%20duas%20circunfer%C3%AAncias%20coplanares%20(em,existirem%20dois%20pontos%20de%20interse%C3%A7%C3%A3o , isso servirá de apoio as explicações além de propor melhores ilustrações acerca do assunto.

Dadas duas circunferências distintas $\lambda_1: (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$ e $\lambda_2: (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2$, de centros $C_1 = (a_1, b_1)$ e $C_2 = (a_2, b_2)$ e raios $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$, respectivamente, elas podem ter dois, um ou nenhum ponto em comum. Para realizar essa análise, podemos comparar a distância dos centros das circunferências $d(C_1, C_2) =$

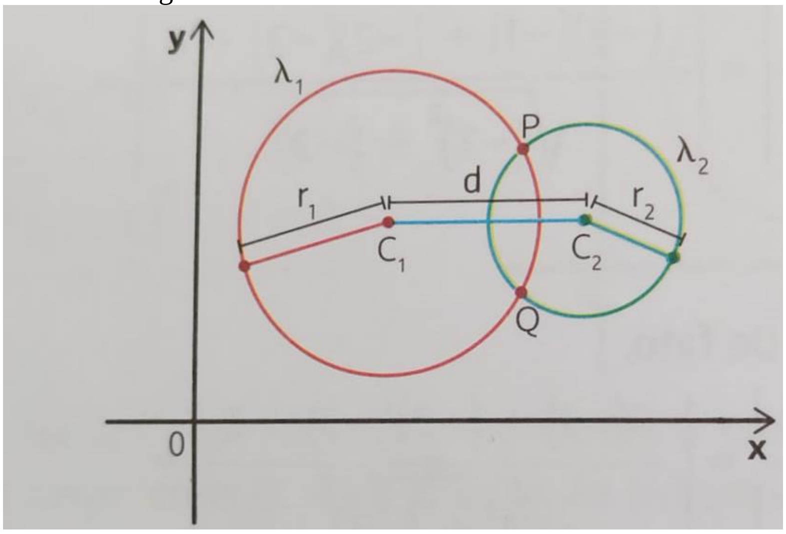
$\sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$ com a soma $r_1 + r_2$ e com o módulo da diferença $|r_1 - r_2|$ dos raios.

Sendo d a distância entre os centros das circunferências, temos:

- Circunferências secantes (dois pontos em comum):

$$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$$

Figura 81: Circunferências secantes.



Fonte: Chavantes e Prestes, 2016, p. 138.

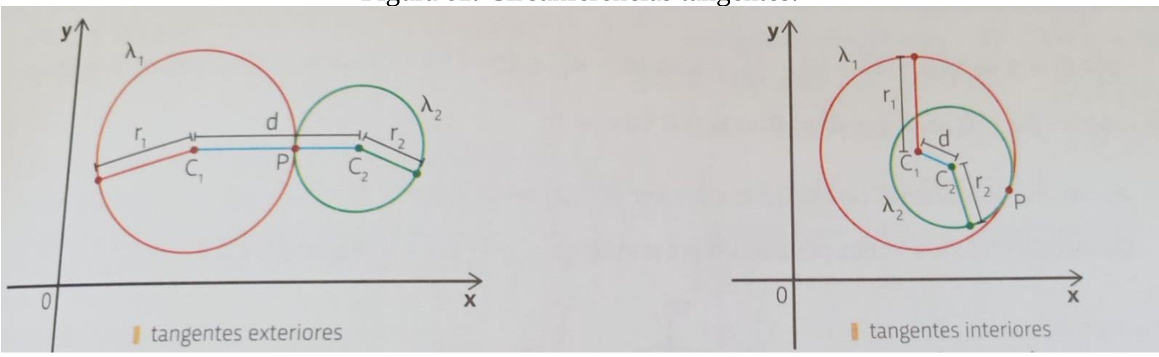
- Circunferências tangentes (um ponto em comum):
    - Tangentes exteriores:

$$d = r_1 + r_2$$

    - Tangentes interiores:

$$d = |r_1 - r_2|$$

Figura 82: Circunferências tangentes.



Fonte: Chavantes e Prestes, 2016, p. 138.

- Circunferências exteriores ou interiores (nenhum ponto em comum):

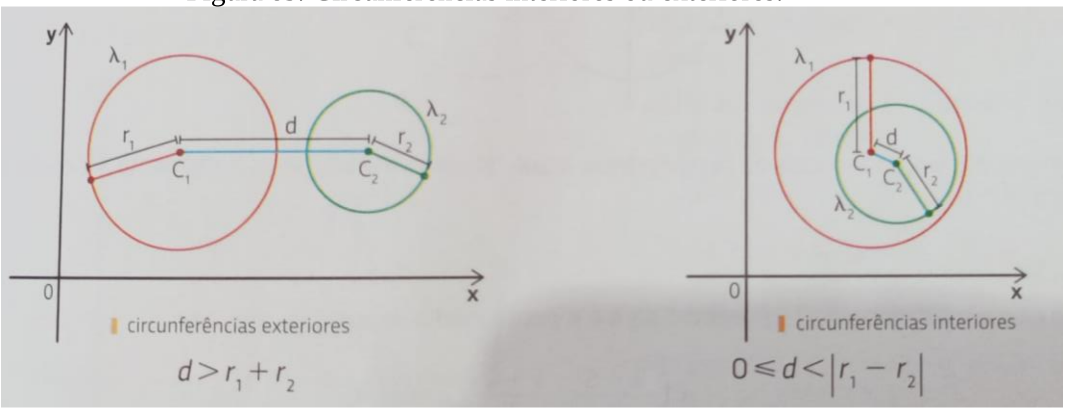
- Circunferências exteriores:

$$d > r_1 + r_2$$

- Circunferências interiores:

$$0 \leq d < |r_1 - r_2|$$

Figura 83: Circunferências interiores ou exteriores.

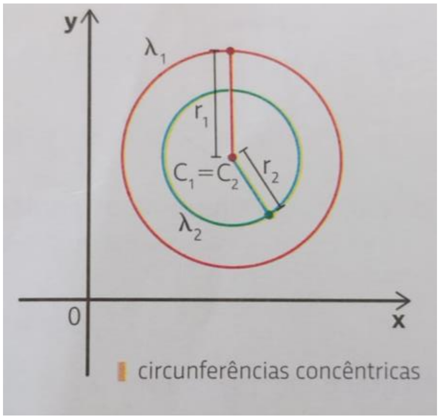


Fonte: Chavantes e Prestes, 2016, p. 138.

- Circunferências interiores quando os centros coincidem. Nesse caso chamamos de circunferências concêntricas.

$$d = 0$$

Figura 84: Circunferências concêntricas.



Fonte: Chavantes e Prestes, 2016, p. 138.

Exemplo: Determine a posição relativa entre as circunferências

$$(x + 2)^2 + (y - 12)^2 = 169$$

e

$$x^2 + (y - 3)^2 = 25$$

Primeiro, vamos determinar os centros C_1 e C_2 e os raios r_1, r_2 de cada circunferência.

Como $(x+2)^2 + (y-12)^2 = 169$, então, o centro é $C_1 = (-2{,}12)$ e o raio é $r_1 = 13$.

Da mesma forma, como $x^2 + (y-3)^2 = 25$, então, o centro é $C_2 = (0{,}3)$ e o raio é $r_2 = 5$.

Agora vamos determinar a distância d entre os centros:

$$d = \sqrt{\left(0-(-2)\right)^2 + (3-12)^2}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{2^2 + 9^2}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{85}$$

Observe que $|13-5| < \sqrt{85}$, ou seja, $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$. Portanto, as circunferências são secantes.

Exercícios:

1) (Fgv 2010) Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$, seja P seu ponto de ordenada máxima. A soma das coordenadas de P e:

a) 10

b) 10,5

c) 11

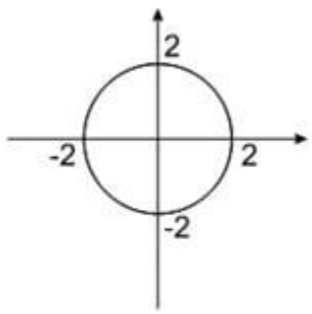
d) 11,5

e) 1

R:O centro C da circunferência será $C = \left(\frac{6}{2}, \frac{10}{2}\right) = (3{,}5)$, já o raio ao quadrado será $3^2 + 5^2 - 30 = 34 - 30 = 4$, ou seja, o raio será 2. Logo o ponto P tem coordenadas $P = (3, 5+2) = (3, 7)$ e somando suas coordenadas obtemos a soma 10, logo a alternativa correta é a letra a.

2) (cftsc 2010- Adaptada) Dada a figura abaixo cujas medidas estão expressas em centímetros,

Figura 85: Circunferência de raio 2.



Fonte: https://blogdoenem.com.br/circunferencia-matematica-enem/.

e as proposições:

- I – é uma circunferência de diâmetro $2\ cm$.
- II – é uma circunferência que determina um círculo de área $4\pi\ cm^2$.
- III – é uma circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$.

Considerando as proposições apresentadas, assinale a alternativa correta:

a) Apenas as proposições I e III são verdadeiras.

b) Apenas as proposições I e II são verdadeiras.

c) Apenas a proposição III é verdadeira.

d) Apenas as proposições II e III são verdadeiras.

e) Apenas a proposição II é verdadeira.

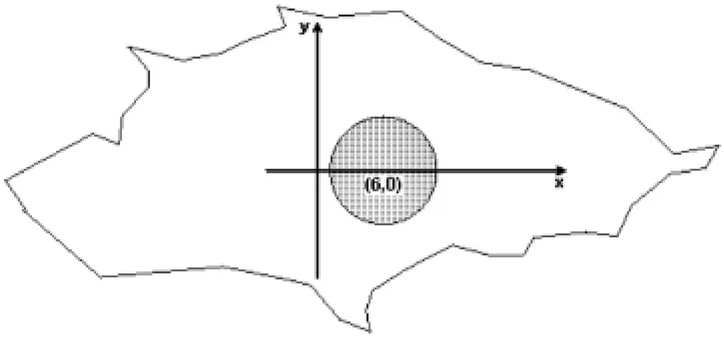
R: Como o raio mede 2, então o diâmetro mede o dobro do raio ou seja 4, logo I é falsa. Como o círculo é determinado por uma circunferência de raio 2, então sua área é $2^2\pi\ cm^2$, logo, $4\pi\ cm^2$, portanto II é verdadeira. Como o centro da circunferência é a origem e o raio é dois então a equação é $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 2^2$, ou seja, $x^2 + y^2 = 4$, logo III é verdadeira.

Concluímos então que a alternativa correta é a letra d.

3) (UFSC- Adaptada) A figura a seguir representa parte do mapa de um pais, em que o ponto C(6,0) foi o epicentro de um terremoto cujos efeitos foram sentidos, no máximo, até um raio de 5 km. (Considere 1 unidade linear do plano cartesiano correspondendo a 1 km.)

Com base na figura, pode-se afirmar que a região afetada pelo terremoto é representada, nesse sistema de eixos, pela inequação $x^2 + y^2 + 12x + 11 \leq 0$?

Figura 86: Epicentro do terremoto.



Fonte: https://pt.slideshare.net/AtaideBrando/questes-de-vestibular-circunferncia-2009-a-2011.

R: O centro da circunferência é o ponto C e o raio é 5 km. Logo descobrindo primeiro a equação da circunferência teríamos que

$$(x-6)^2 + y^2 = 5^2$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 25 = 0$$

$$x^2 - 12x + y^2 + 11 = 0$$

Como é a circunferência e sua região interna trocamos a igualdade pela desigualdade de menor ou igual, chegando que a região afetada pelo terremoto é representada pela equação

$$x^2 - 12x + y^2 + 11 \leq 0$$

Portanto, a reposta é não.

4) (CEV-URCA- 2016) Uma determinada cidade sofreu um terremoto cujos efeitos foram sentidos, no máximo, até um raio de 3Km a partir do seu epicentro. Se em um determinado sistema cartesiano, onde cada unidade linear corresponde a 1 Km, o epicentro deste terremoto estiver localizado no ponto (4,0), então a região afetada pelo terremoto é representada por:

a) $x2 + y2 - 5x + 8 > 0$

b) $x2 + y2 - 5x + 8 \leq 0$

c) $x2 + y2 - 8x + 7 \leq 0$

d) $x2 + y2 - 8x + 7 > 0$

e) $x2 + y2 - 8x + 7 > 0$

R: O raio da circunferência é 3 km e o centro $C(4, 0)$. Com isso a equação da circunferência seria

$$(x - 4)^2 + y^2 = 3^2$$
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 9 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$$

Mas como pede a região afetada, então se trata também da região interna, logo a região afetada pelo terremoto é representada pela equação:

$$x^2 + y^2 - 8x + 7 \leq 0$$

Portanto a alternativa correta é a letra c.

Referências

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante Matemática 3.** São Paulo: Edições SM, 2016.

MODERNA, E. **Conexões com a matemática.** 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013.

QUESTÕES de concursos. Disponível em: https://www.qconcursos.com/questoes-de-vestibular/questoes/af6f3e5f-ff . Acesso em: 24 jun. 2022.

BLOG DO ENEM. Circunferência: resumo de Geometria Analítica. É Matemática Enem. Disponível em: https://blogdoenem.com.br/circunferencia-matematica-enem/. Acesso em: 24 jun. 2022.

SLIDE SHARE. Questões de vestibular Circunferência (2009 a 2011). Disponível em: https://pt.slideshare.net/AtaideBrando/questes-de-vestibular-circunferncia-2009-a-2011. Acesso em: 24 jun. 2022.

GEOGEBRA. Posições relativas entre circunferências. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/zvaja9dv#:~:text=Considerando%20duas%20circunfer%C3%AAncias%20coplanares%20(em,existirem%20dois%20pontos%20de%20interse%C3%A7%C3%A3o . Acesso em: 24 jun. 2022.

2.8.2 Relatório encontro 6

No dia 25 de junho realizamos o sexto encontro presencial do segundo semestre do PROMAT, neste dia estavam presentes 5 alunos.

Iniciamos a aula com a correção do exercício deixado na aula anterior. O exercício pedia a equação da reta que passa pelo ponto $P = (½, 1)$ e é perpendicular a uma reta que possui inclinação $\frac{5}{2}$. Para resolvê-lo, relembramos a relação entre os coeficientes angulares de retas perpendiculares. Denotando por $m_2 = \frac{5}{2}$ a inclinação de uma reta s, podemos encontrar a inclinação m_1 da reta r perpendicular a s e que passa por P a partir da relação $m_2 = -\frac{1}{m_1}$. Realizando as contas encontramos $m_1 = -\frac{2}{5}$. Assim, r tem equação $y = -\frac{2}{5}x + b$ e substituindo o ponto P nesta equação obtemos $b = -\frac{4}{5}$, logo $y = -\frac{2}{5}x - \frac{4}{5}$ é a equação de r.

Após isso, realizamos a dinâmica que havia sido preparada para a aula anterior, os alunos formaram dois grupos, um com três participantes e o outro com dois participantes. Então entregamos a caixinha com os quatro dados e pedimos que fossem retirando um dado por vez e jogando sobre a mesa, o valor que caísse para cima do primeiro dado será o valor da abcissa do primeiro ponto, o valor do segundo dado será o valor da ordenada do primeiro ponto. O valor do terceiro e do quarto dado será respectivamente o valor das abcissas e ordenadas do segundo ponto. No primeiro grupo os pontos foram $A = (-3,0)$ e $B = (4,2)$ e no segundo grupo os pontos foram $C = (5, -5)$ e $D = (7,4)$.

Então solicitamos que cada grupo achasse a equação geral da reta que passa por esses dois pontos. Depois que a partir dos mesmo dois pontos encontrassem a equação reduzida da reta definida por eles e por último, como prova real, que achassem a equação reduzida isolando o y na equação geral. Feito isso, pedimos para que os grupos fossem ao quadro responder e apresentar seus cálculos conforme mostra a Figura 68.

Figura 87: Alunos encontrando a equação das retas no quadro.

Fonte: Próprios autores.

Um grupo achou a equação reduzida por meio de sistemas lineares, explicamos para a turma que era um outro método também possível de resolver. Pedimos se tinham alguma dúvida sobre as equações de retas, como não havia nenhuma começamos o conteúdo sobre circunferências.

Primeiro pedimos o que as imagens (Figura 55) do slide possuíam em comum, os alunos disseram que todos eram círculos, confirmamos e mencionamos que cada objeto possuía o formato de uma circunferência. Mostramos nos slides a definição de circunferência, explicamos uma circunferência de raio r e centro $O=(a,b)$ é o conjunto de todos os pontos do plano, equidistantes de O, ou seja, a distância de O até P é sempre r, o que pode ser visto na equação $d(O,P)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$.

Em seguida apresentamos a ideia e os detalhes sobre sua equação reduzida que é obtida através da equação anterior elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade, obtendo $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ e expandindo os produtos $(x-a)^2$ e $(y-b)^2$, obtemos $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$ que é a equação geral da circunferência. Com isso, destacamos que não conseguíamos perceber de forma imediata qual era o centro e o raio da circunferência representada pela equação geral, e que havia um método para conseguir determinar tais informações que consistia em completar quadrados, encontrando assim a equação reduzida através da geral.

Então explicamos no quadro como completar quadrados através da equação $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Primeiro agrupamos em um lado da igualdade os termos em x e os termos em y e no outro deixamos o termo independente. Observemos o produto notável desenvolvido $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ e ressaltamos que em nossa equação faltava o termo a^2 e para encontrá-lo bastava dividir o coeficiente em x por -2 e depois elevá-lo ao quadrado. Na equação dada, $\frac{-2}{-2} = 1$, $1^2 = 1$ e somamos 1 na equação. Fizemos o mesmo para completar o quadrado em y, $\frac{4}{-2} = -2$ e $(-2)^2 = 4$, então somamos 4 a equação obtendo $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = -4 + 1 + 4$. Após isso, escrevemos esta equação na forma reduzida $(x - 1)^2 + \left(y - (-2)\right)^2 = 3^2$.

Após a explicação apresentamos um exercício para que fixassem o método, o qual deveriam encontrar a forma reduzida da equação $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0$. Enquanto os alunos resolviam fomos tirando dúvidas, discutindo e resolvendo em conjunto nas carteiras e depois resolvemos no quadro através do método de completar quadrados.

Em seguida introduzimos as posições relativas entre ponto circunferência, reta e circunferência e entre circunferências. Primeiro explicamos que um ponto pode ser interior, exterior ou pertencente a uma circunferência. Para identificar isto, observamos a distância entre o ponto e o centro da circunferência. Se o ponto é interior, a distância entre o ponto e o centro da circunferência é menor que o raio, se for exterior esta distância é maior que o raio e pertencente, a distância é igual ao raio.

Após a explicação, passamos um exemplo para fixarem os conceitos, no qual era para determinar a posição do ponto $P = (1,5)$ em relação a circunferência $x^2 + (y - 2)^2 = 9$. Primeiro destacamos o centro desta circunferência e deixamos para que os alunos calculassem a distância entre o ponto P e o centro da circunferência. Apenas alguns alunos necessitaram de auxílio na carteira para resolver os cálculos desse exercício. Após a maioria ter terminado de resolver, foi corrigido o exemplo no quadro. Os alunos conseguiram encontrar o valor da distância que foi $\sqrt{10}$ e o raio era 3, quando solicitado, os alunos responderam que o ponto era externo à circunferência.

Dando continuidade ao conteúdo, foi mostrada a imagem que continha a imagem com a caixa e o CD dentro dela. Foi pedido aos alunos a posição das bordas da caixa em relação ao CD. Os alunos responderam que a caixa toca o CD em apenas um ponto, pois não teria como a borda da caixa passar pelo meio. Em seguida, foi explicado que se fôssemos considerar as bordas da caixa como retas e o CD como uma circunferência, é possível observar que cada borda iria tocar o CD em apenas um ponto, logo, cada reta toca apenas em um único ponto na circunferência, portanto, a retas que representam as bordas seriam tangentes ao CD. Durante as explicações os alunos se demonstraram atentos ao conteúdo e não se manifestaram com dúvidas.

Em seguida, foi mostrada a imagem com o violão e pedido aos alunos para que imaginassem as cordas do violão como sendo retas e a boca sendo uma circunferência. Foi pedido aos alunos que analisassem a posição das retas representadas pelas cordas do violão em relação à circunferência representada pela boca. Um dos alunos respondeu que cada corda passa em dois pontos da circunferência representada pela boca e, portanto, era secante à circunferência. Os demais alunos permaneceram em silêncio mantendo a atenção na aula.

Mostradas as imagens e feitas as essas relações, foi explicado aos alunos que trouxemos essas imagens para que eles percebam que a matemática não está desconexa com o cotidiano, pelo contrário, ela está presente em tudo. Depois, foram passadas as definições das posições relativas entre reta e circunferência que são três possíveis casos, ou seja, secante tocando a circunferência em dois pontos, tangente que toca a circunferência em apenas um ponto e exterior que não toca em nenhum ponto da circunferência.

Para classificar a posição entre reta e circunferência, basta calcular a distância entre o centro da circunferência até a reta. Explicamos que até o momento não tínhamos passado como calcular assa distância, portanto, passamos a fórmula da distância entre um ponto e uma reta para que seja possível resolver os exercícios. Tendo essa distância calculada, basta relacionar com o raio da circunferência, ou seja, se a distância for menor que o raio a reta seria secante, se for maior seria externa e se for igual a reta seria tangente à circunferência. Os alunos mantinham a atenção nas explicações, e quando perguntado se havia alguma dúvida eles responderam que não.

Para fixar esse conteúdo, foi pedido para que resolvessem o exemplo que pedia para determinar a posição relativa entre a reta s de equação $x + y + 1 = 0$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$. Inicialmente, explicamos que a circunferência não estava em sua fórmula reduzida, logo, haveria necessidade de transformar a equação dada para a equação reduzida e encontrar as coordenadas do centro para então calcular a distância entre a reta e a circunferência. Os alunos tiveram dificuldade em aplicar a fórmula da distância entre ponto e reta, mas com o auxílio dos estagiários explicando novamente nas carteiras, eles conseguiram compreender e resolver. Quando a maioria já tinha resolvido o exercício, foi corrigido no quadro e encontrado que a reta é secante à circunferência conforme os alunos já haviam encontrado.

Seguimos então o conteúdo de posição relativa entre duas circunferências, para isso apresentávamos a teoria nos slides e realizávamos uma amostragem por meio da ferramenta GeoGebra, gerando dessa forma melhores ilustrações acerca do assunto. Começamos explicando que dada duas circunferências distintas, elas podem ter dois, um ou nenhum ponto em comum. Também comentamos que para descobrir de qual caso se trata dada as equações dessas circunferências, basta comparar a distâncias dos centros das duas circunferências com a soma e também diferença em módulo dos respectivos raios.

Feito isso, apresentamos as circunferências secantes, ou seja, que possuem dois pontos em comum, mostramos também que uma forma de descobrir é analisar se a desigualdade a seguir é satisfeita.

$$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$$

Em seguida apresentamos a imagem ilustrativa evidenciando duas circunferências secantes e seus raios e distâncias entre os centros. Após isso, mostramos mais exemplos no GeoGebra.

Partimos para as circunferências tangentes, ou seja, com um único ponto em comum. Explicamos que havia dois casos nessa situação, as tangentes exteriores e interiores, as quais satisfaziam as respectivas desigualdades:

- Tangentes exteriores:

$$d = r_1 + r_2$$

- Tangentes interiores:

$$d = |r_1 - r_2|$$

Para ficar mais claro a ideia, mostramos a imagem no slide ilustrando os dois casos e as desigualdades. Após isso, utilizamos novamente o GeoGebra para exemplificar melhor.

Após este momento, começamos a trabalhar com as circunferências exteriores e interiores, ou seja, circunferências com nenhum ponto em comum. Mostramos as desigualdades a seguir:

- Circunferências exteriores:

$$d > r_1 + r_2$$

- Circunferências interiores:

$$0 \leq d < |r_1 - r_2|$$

Então apresentamos a imagem contendo a ilustração de circunferências exteriores e interiores, após isso utilizamos novamente o GeoGebra para mostrar mais exemplos.

Por fim mostramos um caso especial de circunferências interiores, as circunferências concêntricas, isto é, que possuem os centros coincidentes. Falamos que isso ocorre quando a distância dos centros é nula e esta é uma maneira de descobrir se duas circunferências são concêntricas. Então apresentamos a imagem no slide um exemplo e partimos para o GeoGebra, evidenciando a ideia.

Pedimos se os alunos possuíam alguma dúvida, eles disseram que não, então como a aula se aproximava do fim e não disponibilizávamos de tempo suficiente para trabalhar os exercícios propostos, apenas fizemos a leitura dos enunciados, explicamos a ideia de cada um e dispensamos os alunos, deixando os exercícios como tarefa. As resoluções foram mandadas posteriormente no grupo do WhatsApp o qual os discentes são membros.

2.9 Módulo/encontro 7 -

2.9.1 Plano de aula

PLANO DE AULA

Público-Alvo: A aula preparada se destina aos alunos que participarão do PROMAT que é um Projeto de Ensino institucional do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática que visa atender alunos da rede pública estadual de ensino. As atividades são direcionadas aos estudantes que buscam acesso aos cursos superiores.

Tempo de execução: 30 minutos.

Conteúdo: Princípio fundamental da contagem.

Objetivo Geral: Introduzir o princípio fundamental da contagem.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com o princípio fundamental da contagem, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Reconhecer onde cada fórmula pode ser aplicada conforme a natureza dos problemas que envolvem o princípio fundamental da contagem;
- Identificar situações do cotidiano em que seja possível aplicar o princípio fundamental da contagem;
- Resolver exercícios envolvendo os conceitos estudados.

Recursos Didáticos: Slides.

Encaminhamento metodológico: Iniciaremos a aula com uma contextualização sobre as placas de carros.

Atividade placas de carro

Os veículos possuem um cadastro com diversas informações sobre cor, modelo, ano, número de chassi, numeração do motor, potência, proprietário, endereço de localização, entre outras. O acesso a esses dados cadastrais é realizado através da placa de identificação do veículo.

No decorrer dos anos foi adotado mais uma letra nas placas dos automóveis. Por que adotar mais uma letra em vez de um número?

R: Devido ao aumento do número de veículos. Se observarmos existem 26 possibilidades para uma letra e 10 possibilidades para um número.

Figura 88: Placas de carros no decorrer dos anos.

Fontes: http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudos-principio-fundamental-da-contagem/

https://www.detran.am.gov.br/detran-am-implanta-placa-do-mercosul-no-estado/

As mudanças de modelos de placas se deram devido ao aumento do número de automóveis, mas quantos carros podem ser emplacados com o novo modelo de placa do padrão Mercosul?

R: Como no sistema mais recente no padrão Mercosul é utilizado 4 letras (em um alfabeto de 26 letras) seguidas de 3 algarismos (de 0 a 9), isto é, para cada posição que deve ser ocupada por uma letra temos 26 possibilidades, visto que é permitido a repetição, já para cada posição a qual deve ser designada um algarismo se tem 10 possibilidades, visto que é possível o caso de repetições, logo teremos que:

$$\frac{L}{26} \times \frac{L}{26} \times \frac{L}{26} \times \frac{N}{10} \times \frac{L}{26} \times \frac{N}{10} \times \frac{N}{10}$$

Assim,

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 26 \times 10 \times 10 =$$

$$456976000 \ \ placas$$

1) (FUVEST- 2022 - 1ª fase) Atualmente, no Brasil, coexistem dois sistemas de placas de identificação de automóveis: o padrão Mercosul (o mais recente) e aquele que se iniciou em 1990 (o sistema anterior, usado ainda pela maioria dos carros em circulação). No sistema anterior, utilizavam-se 3 letras (em um alfabeto de 26 letras) seguidas de 4 algarismos (de 0 a 9). No padrão Mercosul adotado no Brasil para automóveis, são usadas 4 letras e 3 algarismos, com 3 letras nas primeiras 3 posições e a quarta letra na quinta posição, podendo haver repetições de letras ou de números. A figura ilustra os dois tipos de placas.

Figura 89: Placas padrão Mercosul e placa do sistema anterior.

Fonte: https://www.kuadro.com.br/gabarito/fuvest/2022/matematica/fuvest-2022-1-fase-atualmente-no-brasil-coexistem-/69228. Acesso em: 2 mar. 2022.

Dessa forma, o número de placas possíveis do padrão Mercosul brasileiro de automóveis é maior do que o do sistema anterior em:

A) 1,5 vezes.
B) 2 vezes.
C) 1,6 vezes.
D) 2,8 vezes.
E) 3 vezes.

R: Como no sistema anterior utilizavam-se 3 letras (em um alfabeto de 26 letras) seguidas de 4 algarismos (de 0 a 9), isto é, para cada posição que deve ser ocupada por uma letra temos 26 possibilidades, visto que é permitido a repetição, já para cada posição a qual deve ser designada um algarismo se tem 10 possibilidades, visto que é possível o caso de repetições, ou seja, teremos então:

$$\frac{L}{26} \times \frac{L}{26} \times \frac{L}{26} \times \frac{N}{10} \times \frac{N}{10} \times \frac{N}{10} \times \frac{N}{10}$$

Assim,

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 =$$

$$175760000\, placas$$

Como se pede em quantas vezes o novo padrão é maior que o antigo, basta diminuir da quantidade de novas placas possíveis no novo padrão (456976000) a quantidade das placas possíveis do sistema anterior (175760000) e depois dividir o resultado pela quantidade de placas possíveis do sistema anterior:

$$456976000 - 175760000 = 281216000$$

Por fim, dividindo

$$\frac{281216000}{175760000} = 1{,}6\, vezes.$$

Alternativa C).

Após a contextualização e resolução do exercício apresentar a formalização do princípio fundamental da contagem.

Análise combinatória é o campo de estudo que desenvolve métodos para fazer a contagem, de forma eficiente, do número de elementos de um conjunto. Veremos agora como contar os elementos por meio do princípio fundamental da contagem:

> De acordo com o princípio fundamental da contagem, se um evento é composto por duas ou mais etapas sucessivas e independentes, o número de combinações será determinado pelo produto entre as possibilidades de cada conjunto.

Exemplo genérico: Considere um evento que ocorre duas etapas sucessivas, A e B. Se A pode ocorrer de m maneiras e se, para cada uma, B pode ocorrer de n maneiras, o número de maneiras da ocorrência do acontecimento é $m \times n$.

Exemplo: Claudio descobriu que seu pai estava acessando seu celular, então decidiu colocar uma senha para ter mais privacidade. A senha deveria ser uma combinação de quatro algarismos de 0 a 9 sem repetição, e também uma letra, sendo que não se diferenciam letras minúsculas e maiúsculas. Dessa forma, quando o pai de Claudio tentar acessar o celular, quantas possibilidades de senha ele poderá tentar?

R: De acordo com as informações a senha criada por Claudio terá cinco dígitos, sendo os quatros primeiros, algarismos de 0 a 9, e o quinto digito uma letra. Para o primeiro dígito temos 10 possibilidades (de 0 a 9), como não podemos repetir números, ao escolher o segundo digito devemos retirar o que já foi escolhido, ou seja, temos 9 possibilidades. Fazemos o mesmo para o terceiro e quarto dígitos, sendo 8 e 7 possibilidades respectivamente. E por fim, o quinto digito temos 26 possibilidades. Dessa forma, pelo Princípio Fundamental da contagem

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 26 = 131040$$

Temos 131040 possibilidades de senha para o pai de Claudio tentar e acertar uma delas.

2) (ENEM 2015) Numa cidade, cinco escolas de samba **(I, II,** III**, IV, V)** participaram do desfile de carnaval. Quatro quesitos são julgados, cada um por dois jurados, que podem atribuir somente uma dentre as notas **6, 7, 8, 9** ou **10**. A campeã será a escola que obtiver maior pontuação na soma de todas as notas emitidas. Em caso de empate, a campeã será a que alcançar a maior soma das notas atribuídas pelos jurados no quesito Enredo e Harmonia. A tabela mostra as notas do desfile desse ano quando faltava somente a divulgação das notas do jurado **B** no quesito **Bateria**

Figura 90: Notas das escolas de samba.

Quesitos	1. Fantasia e Alegoria		2. Evolução e Conjunto		3. Enredo e Harmonia		4. Bateria		Total
Jurado	A	B	A	B	A	B	A	B	
Escola I	6	7	8	8	9	9	8		55
Escola II	9	8	10	9	10	10	10		66
Escola III	8	8	7	8	6	7	6		50
Escola IV	9	10	10	10	9	10	10		68
Escola V	8	7	9	8	6	8	8		54

Fonte: https://matika.com.br/vestibular/enem/principio-fundamental-da-contagem

Quantas configurações distintas das notas a serem atribuídas pelo jurado **B** no quesito Bateria tornariam campeã a **Escola II**?

a) 21.
b) 90.
c) 750.
d) 1 205.
e) 3 125.

R: Observemos que as escolas I, III e V não tem chance de ganhar pois mesmo recebendo 10 pontos do jurado **B** não irão atingir 68 pontos. Em caso de empate entre as escolas II e IV, a escola II é campeã pois tem maior pontuação no quesito Enredo e Harmonia. A disputa pela vitória fica entre as escolas II e IV. Vamos fazer uma tabela com as possibilidades de empate e de vitória direta da escola II.

Tabela 2: Possibilidades de empate e de vitória direta da escola II.

	II	IV	Total da escola II	Total da escola IV
Empate	10	8	76	76
Empate	9	7	75	75
Empate	8	6	74	74
Vitória direta da escola II	10	7	76	75
Vitória direta da escola II	10	6	76	74
Vitória direta da escola II	9	6	75	74

Fonte: Próprios autores.

Observemos então que temos 6 configurações de notas para a vitória da escola II e 5 configurações de notas para as outras três escolas. Dessa forma, pelo Princípio fundamental da contagem temos

$$6 \times 5 \times 5 \times 5 = 750.$$

São 750 configurações distintas de notas a serem atribuídas pelo jurado B que fazem a escola II campeã.

Referências:

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante Matemática 3.** São Paulo: Edições SM, 2016.

MODERNA, E. **Conexões com a matemática.** 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013.

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM. **Matika.** Disponível em: https://matika.com.br/vestibular/enem/principio-fundamental-da-contagem. Acesso em: 2 mar. 2022.

SILVA, M. N. P. da. Permutando Números e Letras. **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/permutando-numeros-letras.htm. Acesso em 08 de março de 2022.

SILVA, M. N. P. da. Princípio Fundamental da Contagem e Fatorial. **Mundo Educação**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/principio-fundamental-contagem-fatorial.htm#:~:text=De%20acordo%20com%20o%20princ%C3%ADpio,as%20possibilidades%20de%20cada%20conjunto. Acesso em: 2 mar. 2022.

TRATAMENTO da informação - Princípio Fundamental da Contagem. **Clubes de Matemática da OBMEP**. http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-estudos-principio-fundamental-da-contagem/. Acesso em: Acesso em: 2 mar. 2022.

FUVEST – 2022 -1ª fase. **kuadro**. Disponível em: https://www.kuadro.com.br/gabarito/fuvest/2022/matematica/fuvest-2022-1-fase-atualmente-no-brasil-coexistem-/69228. Acesso em: 2 mar. 2022.

https://www.detran.am.gov.br/detran-am-implanta-placa-do-mercosul-no-estado/

2.9.2 Relatório encontro 7

Aula assíncrona, na qual gravamos um vídeo por meio da plataforma JitsiMeet do conteúdo preparado no plano de aula e disponibilizamos na plataforma Youtube pelo link https://youtu.be/Bpc7wrcfN14. Para os alunos terem acesso a este vídeo enviamos três dias antes do encontro 8 o link através do WhatsApp, onde tínhamos um grupo para nos comunicarmos com os alunos.

Cada integrante do grupo gavou uma parte do plano, sendo anexadas essas partes em um único vídeo durante a edição do vídeo. Após a edição, o vídeo foi indexado no site Youtube.

Para os alunos terem acesso a este vídeo, enviamos três dias após o último encontro presencial o link através do WhatsApp, onde tínhamos um grupo para nos comunicarmos com os alunos. Não houve dificuldades durante as gravações e edições dos vídeos.

2.10Módulo/encontro 8 -

2.10.1 Plano de aula

PLANO DE AULA

Conteúdo: Análise combinatória.

Público-Alvo: Alunos egressos da Rede Pública de Ensino CASCAVEL, inscritos no projeto.

Objetivo geral: Introduzir os conceitos de permutação, arranjo e combinação.

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com análise combinatória, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Compreender os conceitos de permutação, arranjo e combinação;
- Identificar situações que envolvam permutação, arranjo e combinação;
- Resolver exercícios envolvendo os conceitos estudados.

Tempo de execução: 3 horas e 40 minutos.

Recursos didáticos: PowerPoint, quadro, giz.

Encaminhamentos metodológicos: Iniciar a aula trabalhando o conceito de fatorial que será necessário para o conteúdo de análise combinatória.

Fatorial

Considerando um número n, sendo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, temos:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1,$$

Onde:

- A leitura do símbolo $n!$ é: “n fatorial”;
- $n!$ é o produto de todos os números naturais de 1 até n;
- Estendendo a definição: $0! = 1$ e $1! = 1$.

Exemplos:

a) $2! = 2 \times 1 = 2$

b) $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

c) $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Exercícios:

Simplificar as expressões:

a) $\frac{5!}{3!}$

R: $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$

b) $\frac{12!}{10!}$

R: $\frac{12!}{10!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{10!} = 12 \times 11 = 132$

c) $\frac{4!+5!}{4!}$

R: $\frac{4!+5!}{4!} = \frac{4!}{4!} + \frac{5!}{4!} = 1 + \frac{5 \times 4!}{4!} = 1 + 5 = 6$

d) $\frac{12!}{8! \times 4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$

Permutação, arranjo e combinação

Permutação simples

Para introduzir o conceito de permutação pediremos que três alunos se disponibilizem a formar uma fila na sala. Então pediremos de quantas formas está fila pode ser organizada.

- Vamos pensar em uma fila com três pessoas. De quantas maneiras podemos organizar esta fila?

Isto será realizado com três alunos que se disponham participar.

R: Vamos denotar as três pessoas como A, B e C. Então poderíamos organizar a fila das seguintes maneiras:

Quadro 2: Permutação de três pessoas em uma fila.

A	A	B	B	C	C
B	C	A	C	A	B
C	B	C	A	B	A

Fonte: Próprios autores.

Em sala, faremos o quadro acima com o nome dos alunos.

Percebemos então, que existem seis maneiras diferentes de organizar uma fila com três pessoas.

Após isso, vamos formalizar o conceito de permutação.

A permutação está ligada ao ato de reordenar um grupo de objetos. Denotamos a quantidade de permutações de n elementos por P_n. Como vimos anteriormente $P_3 = 6$. Se tivéssemos um conjunto com 5, 10 ou 100 elementos, realizar as permutações como fizemos para 3 elementos seria algo muito trabalhoso. Para isso utilizamos o conceito de fatorial.

A quantidade de permutações de n elementos é $P_n = n!$.

Exercício: (Fuvest 91) Num programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas 10 músicas, mas nunca na mesma ordem. Para esgotar todas as possíveis sequências dessas músicas serão necessários aproximadamente:

a)100 dias.

b) 10 anos.

c) 1 século.

d) 10 séculos.

e) 100 séculos.

R: Vamos calcular todas as possíveis sequências de tocar as 10 músicas. Para isso fazemos uma permutação de 10 elementos.

$$P_n = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$$

Como cada sequência é tocada em um dia, então 3628800 sequencias de músicas serão tocadas em 3628800 dias, já percebemos que a alternativa a) não é a correta. Vamos encontrar quantos anos são necessários para tocas todas as possíveis sequências

$$dias \quad anos$$

$$365 \ \rightarrow 1$$

$$3628800 \ \rightarrow x$$

$$365x = 3628800$$

$$x = \frac{3628800}{365} \cong 9941$$

Assim, são necessários aproximadamente 1000 anos para esgotar todas as sequências com as 10 músicas.

Permutação com repetição

Será feita a seguinte pergunta aos alunos:

- Quantos anagramas podemos formar com a palavra AMORA?

OBS: Anagramas são as alterações realizadas na sequência das letras de uma palavra.

Espera-se que os alunos percebam que na palavra AMORA a letra A aparece duas vezes, logo, não fará diferença permutá-las de lugar. Se não houvesse duas letras iguais na palavra, poderíamos calcular por meio de permutação, porém, nesse caso, não podemos utilizar a permutação pois temos duas letras A na palavra.

Para resolver essa questão, basta dividir o total de permutações simples pelo número de anagramas repetidos, ou seja, o número de permutação simples que temos para a palavra amora é igual a 5!, pois a palavra tem cinco letras. Na palavra temos duas letras A, logo a quantidade de anagramas repetidos será igual a 2!. Logo, o total de anagramas será:

$$\frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60\ anagramas.$$

Após resolver a questão, será formalizado o conceito de permutação com repetição:

Considere n elementos de modo que, entre eles, há elementos repetidos, sendo $p_1$elementos iguais a T_1, p_2 elementos iguais a $T_2, \ldots, p_k$ elementos iguais a T_k. Então, a quantidade de permutações desses elementos é o número $P_n^{p_1, p_2, \ldots, p_k} = \frac{n!}{p_1! p_2! \ldots p_k!}$.

Exemplo: Determinar quantos anagramas da palavra ELEGER começam por uma consoante.

Para começar com consoante, o anagrama deve começar por L, G ou R, logo, temos três possibilidades. Tendo escolhida a primeira consoante, sobram 5 possibilidades, porém, a letra E se repete 3 vezes. Desse modo, teremos a seguinte quantidade de anagramas:

$$3 \cdot \frac{5!}{3!} = 3 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 3 \cdot 20 = 60\ anagramas$$

Antes de passar as definições, será mostrada a Figura 73 que ilustra uma forma para lembrar a diferença entre arranjo e combinação

Figura 91: Diferença entre arranjo e combinação.

Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=qlUZSVSBqJI

Arranjo simples

Será feita a seguinte pergunta aos alunos:

- Suponha que, de uma pilha com 8 livros, deve-se escolher 5 livros para serem colocados em determinada ordem em uma prateleira:

Figura 92: Pilha de livros e estante.

Fonte:https://pixabay.com/pt/illustrations/prateleira-vazia-estante-mobili%C3%A1rio-1249339/

Fonte: https://pt.dreamstime.com/imagem-de-stock-pilha-de-livros-image19549701.

Há quantas maneiras de organizar esses 5 livros na prateleira?

Espera-se que os alunos percebam que para resolver esse problema temos 8 possibilidades para o primeiro livro, 7 para o segundo, pois temos que descontar o primeiro livro que já foi colocado, 6 possibilidades para o terceiro, 5 possibilidades para o quarto livro e 4 possibilidades para o último livro. Desse modo, teremos a seguinte quantidade de combinações:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1^{\underline{o}}\,livro & & 2^{\underline{o}}\,livro & & 3^{\underline{o}}\,livro & & 4^{\underline{o}}\,livro & & 5^{\underline{o}}\,livro \\ 8 & \times & 7 & \times & 6 & \times & 5 & \times & 4 \end{array} = 6720\,maneiras$$

Após apresentar esse exemplo, será formulada juntamente com a turma a fórmula de arranjo. Para isso, será utilizado a fórmula do exemplo:

Quando calculamos o arranjo dos 5 livros escolhidos dentre os 8, tínhamos um arranjo de 8 elementos tomados 5 a 5. Para realizar o cálculo:

$$A_{8,5} = \begin{array}{ccccccccc} 1^{\underline{o}}\,livro & & 2^{\underline{o}}\,livro & & 3^{\underline{o}}\,livro & & 4^{\underline{o}}\,livro & & 5^{\underline{o}}\,livro \\ 8 & \times & 7 & \times & 6 & \times & 5 & \times & 4 \end{array} = 6720\,maneiras$$

Podemos reescrever da seguinte forma:

$$A_{8,5} = \begin{array}{ccccccccc} 1^{\underline{o}}\,livro & & 2^{\underline{o}}\,livro & & 3^{\underline{o}}\,livro & & 4^{\underline{o}}\,livro & & 5^{\underline{o}}\,livro \\ 8 & \times & (8-1) & \times & (8-2) & \times & (8-3) & \times & (8-4) \\ 1\,Fator & & 2\,Fator & & 3\,Fator & & 4\,Fator & & 5\,Fator \end{array} = 6720$$

Nota-se que a forma em que a fórmula é desenvolvida é semelhante ao que fazemos para calcular uma permutação, porém, o número de fatores que utilizamos é correspondente ao número de livros que devemos escolher dentre os 8, ou seja, 5 livros. Desse modo, para calcular um arranjo podemos calcular da seguinte forma:

$$A_{8,5} = \frac{P_8}{(8-5)!} = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$$

Logo, podemos generalizar o conceito de arranjo para n elementos tomados p a p:

Dado um conjunto com n elementos, chama-se **arranjo simples** dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento ordenado (sequência) de p elementos distintos, escolhidos entre os n possíveis. Logo, o cálculo do arranjo simples é dado por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

com $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$ e $0 < p \leq n$.

Exemplo: O campeonato de futebol vai ser disputado por 20 equipes. Admitindo que não haja empates, quantas são as possibilidades de classificação para os dois primeiros lugares?
O total de times que vai disputar o campeonato é igual a 20. Queremos saber quantos arranjos terá os dois primeiros lugares. Desse modo teremos um arranjo de 20 elementos tomados 2 a 2:

$$A_{20,2} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20 \times 19 \times 18!}{18!} = 20 \times 19 = 380\, possibilidades.$$

Combinação

Para introduzir a combinação simples faremos a seguinte pergunta:

- Dentre um grupo de quatro pessoas, quantas duplas podemos formar?

R: Para pensar na situação vamos simbolizar as quatro pessoas como: A, B, C e D. E formar todas as possíveis duplas.

(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D), (C, D).

Portanto, em um grupo de quatro pessoas podemos formar 6 duplas distintas.

Após isso, explicar que o que fizemos na situação anterior foi uma combinação simples de quatro elementos distintos, tomados dois a dois. Então, formalizar o conceito.

Uma combinação simples de n elementos distintos, tomados r a r, é qualquer escolha de r elementos dentre os n elementos dados. Escrevemos $C_{n,r}$ para indicar a quantidade de combinações de n elementos, tomados r a r.

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Em uma combinação, apenas o conjunto dos elementos escolhidos é relevante, de modo que a ordem em que eles forem escolhidos não importa.
Exercício: Em um campeonato de futebol com 6 times, cada time jogou exatamente uma vez contra cada um dos outros. Quantos jogos aconteceram?

R: O número de jogos que aconteceram é igual ao número de maneiras de escolhermos 2 times entre os 6. Esse número é igual a

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2!\,4!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

O número de jogos é igual a 15.

Exercícios:

1) (ENEM – 2021) Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas. A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão:

a) $\frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{15!}{10!5!}$

b) $\frac{6!}{4!2!} + \frac{15!}{10!5!}$

c) $\frac{6!}{2!} + \frac{15!}{5!}$

d) $\frac{6!}{2!} \cdot \frac{15!}{5!}$

e) $\frac{21!}{7!14!}$

R: Como a ordem não importa estamos trabalhando com duas combinações, a primeira sobre o tipo de tecido e a segunda sobre o tipo de pedras. Como será utilizado 2 tipos de tecidos de um total de 6 então é $C_{6,2}$, e como será utilizado 5 tipos de pedras de um total de 15, temos $C_{5,15}$. Como será usado esses materiais para a confecção de uma fantasia e os dois deverão ser usados, ou seja, será utilizado 2 tipos de tecidos E 5 tipos de pedras, logo temos que a quantidade de fantasias será

$$C_{6,2} \times C_{5,15} = \frac{6!}{4!\,2!} \cdot \frac{15!}{10!\,5!}$$

Logo, alternativa a.

2) (ENEM – 2020 – REAPLICAÇÃO) A prefeitura de uma cidade está renovando os canteiros de flores de suas praças. Entre as possíveis variedades que poderiam ser plantadas, foram escolhidas cinco: amor-perfeito, cravina, petúnia, margarida e lírio. Em cada um dos canteiros, todos com composições diferentes, serão utilizadas somente três variedades distintas, não importando como elas serão dispostas.

Um funcionário deve determinar os trios de variedades de flores que irão compor cada canteiro. De acordo com o disposto, a quantidade de trios possíveis é dada por:

a) 5

b) 5×3

c) $\frac{5!}{(5-3)!}$

d) $\frac{5!}{(5-3)!2!}$

e) $\frac{5!}{(5-3)!3!}$

R: Como não importa a forma como serão dispostas logo a ordem não importa então é uma combinação, e ainda, de 5 tipos de flores queremos tomar 3, então:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{(5 - 3)!\,3!}$$

Alternativa e.

3) (ENEM – 2022) A senha de um cofre é uma sequência formada por oito dígitos, que são algarismos escolhidos de 0 a 9. Ao inseri-la, o usuário se esqueceu dos dois últimos dígitos que formam essa senha, lembrando somente que esses dígitos são distintos.

Digitando ao acaso os dois dígitos esquecidos, a probabilidade de que o usuário acerte a senha na primeira tentativa é:

a) $\frac{2}{8}$

b) $\frac{1}{90}$

c) $\frac{2}{90}$

d) $\frac{1}{100}$

e) $\frac{2}{100}$

R: Note que os primeiros seis dígitos da senha ele sabe e esses dígitos não influenciam na descoberta dos dois últimos. Logo queremos descobrir o total de maneiras que se pode “preencher” esses dois dígitos, como se trata de uma senha a ordem importa e de 10 algarismos queremos tomar dois deles, logo é um arranjo, como os dois algarismos são distintos não há repetição, assim:

$$A_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)!}$$

$$A_{10,2} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!}$$

$$A_{10,2} = 10 \times 9 = 90$$

Logo há 90 maneiras, mas como ele quer acertar na primeira tentativa, então a probabilidade é de $\frac{1}{90}$, alternativa b.

Referências

BARRETO, B. F.; SILVA, C. X. **MATEMÁTICA**: aula por aula. Volume único. São Paulo, 2000.

BENEVIDES, S. B. **Material Teórico - Módulo de Princípios Básicos de Contagem**: O fatorial de um número e as permutações simples Disponível em:https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/opxoni3ht1woc.pdf . Acesso em: 29 jun. 2022.

BENEVIDES, S. B. **Material Teórico - Módulo de Princípios Básicos de Contagem**: Arranjo e Combinação Simples. Disponível em: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/dds0ww9e3tsgo.pdf. Acesso em: 01 jul. 2022.
EXERCÍCIOS de Matemática Análise Combinatória: Permutação. Projeto Medicina. Disponível em: http://projetomedicina.com.br/site/attachments/article/433/analise_combinatoria_permutacao_exercicios.pdf. Acesso em: 01 jul. 2022.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante Matemática 3.** São Paulo: Edições SM, 2016.

QUESTÕES de concursos. Disponível em: https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/questoes?discipline_ids%5B%5D=13&subject_ids%5B%5D=14567 . Acesso em: 01 jul. 2022.

MODERNA, E. **Conexões com a matemática.** 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013.

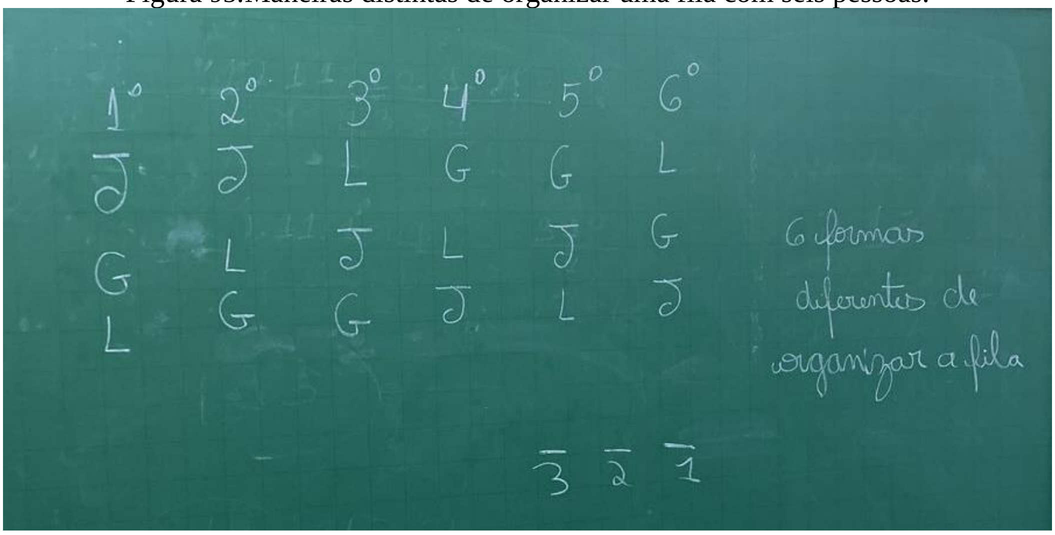
2.10.2 Relatório encontro 8

No dia 02 de julho realizamos o oitavo encontro presencial do PROMAT. Neste dia estavam presentes 6 alunos. Iniciamos a aula com a explicação sobre o conteúdo de fatorial.

Ao corrigir a letra b) do primeiro exercício um aluno perguntou: “O número de baixo não interfere nada?”, então explicamos que interferia sim pois era feito a simplificação pelo fator do denominador. Para resolver a letra c) um dos alunos comentou que somou $4! + 5! = 9!$, então desenvolvemos cada e fizemos sua soma, $4! + 5! = 4 * 3 * 2 * 1 + 5 * 4 * 3 * 2 * 1$ fatorial e mostramos que não poderiam simplesmente somar pois não chega no resultado correto. Na letra d), um aluno questionou sobre o símbolo de multiplicação, explicamos que tanto o ponto, como $\times$, e também parênteses simbolizam a operação de multiplicação. Uma aluna questionou se poderia fazer $\frac{12!}{4!} = 3!$, explicamos que não e para isso desenvolvemos o 12! E o 4!, assim mostrando que não era possível, apresentamos também um exemplo mais simples, o $\frac{4!}{2!}$ que seria $\frac{4\times3\times2!}{2!} = 4 \times 3 = 12$, no entanto se fosse utilizar o raciocínio proposto encontraríamos que $\frac{4!}{2!} = 2! = 2 \times 1 = 2 \neq 12$, comentamos que quando estarem diante de uma prova ou exercício e não tiverem certeza se certa propriedade é válida uma boa alternativa é testar em exemplos mais simples, se falhar é porque está incorreta. Perguntamos se possuíam mais dúvidas, como os alunos disseram que não avançamos com o conteúdo da aula.

Para explicar sobre permutação solicitamos que três alunos se disponibilizassem a vir na frente da sala para uma dinâmica. Após isso, pedimos para que se organizassem em uma fila e depois se reorganizassem de forma a ir mostrando todas as maneiras possíveis de organizar essa fila. Fomos representando as posições pelas iniciais de cada aluno, ao final encontramos as seguintes formas.

Figura 93:Maneiras distintas de organizar uma fila com seis pessoas.



Fonte: Próprios autores.

Após a dinâmica, explicamos que, o que havíamos realizado era uma permutação de três elementos, ou seja, todas as possíveis maneiras de reorganizar três objetos. Para formalizar o conceito, discutimos com os alunos o caso se tivéssemos 5, 10 ou 100 elementos para permutar, algo que seria trabalhoso realizar manualmente. Então, formalizamos o conceito. Explicamos que uma permutação de n elementos é simbolizada por P_n e $P_n = n!$ que nos dá o total de permutações possíveis com esses elementos.

Para fixar o conceito, propomos um exercício. Neste exercício, uma emissora de rádio sempre tocava uma sequência das mesmas dez músicas por dia, mas nunca na mesma ordem. O que se precisava descobrir era quantos dias seriam necessários para esgotar todas as sequências possíveis. Depois da leitura e explicação deixamos um tempo para que os alunos resolvessem. Quando começamos a correção, pedimos como iriamos descobrir a quantidade de sequências que poderiam ser tocadas. Os alunos responderam que poderíamos fazer 10!, então explicamos que iriamos permutar esses dez elementos, assim, escrevemos no quadro $P_{10} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$. Ou seja, as sequências serão esgotadas em 3628800 dias, montamos uma regra de três para mostrar que 3628800 dias são aproximadamente 10000 anos e correspondem a 100 séculos.

Feito isso, começamos a explicar sobre permutação com repetição e para isso utilizamos do anagrama AMORA, para isso, foi pedido aos alunos quantos anagramas poderiam ser formados com essa palavra. Os alunos responderam que calculava uma permutação para resolver. Foi explicado que usaria o mesmo conceito de permutação, porém, nesse caso, é possível observar que ao permutar as duas letras A de lugar o anagrama seria o mesmo, ou seja, seria duplicado.

Foi pedido aos alunos como seria possível tirar essas duplicações. Uma aluna respondeu que poderia diminuir do total o quanto essa letra se repetia. Foi explicado que como as letras estão duplicadas, para retirar do total era necessário fazer a operação inversa da multiplicação uma vez que a quantidade de anagramas estava multiplicada por dois, logo, bastava dividir o total de anagramas pelo total de repetições que nesse caso seria dois, pois a letra A estava repetida duas vezes.

Em seguida foi explicada a fórmula de permutação com repetição fazendo comparação com o exemplo acabado de calcular. Foi realizado mais um exemplo de cálculo de permutação com repetição utilizando como exemplo a palavra ESSE que possui duas letras repetidas, logo, foi realizado o cálculo da permutação considerando as duas repetições das letras E e S. Também foi explicado que a forma de calcular se repetiria se houvesse 3 ou mais letras repetidas. Os alunos estavam atentos às explicações e quando perguntado se havia dúvidas eles negaram.

Para praticar o conceito de permutação com repetição foi passado um exemplo que pedia para calcular quantos anagramas da palavra ELEGER começam por uma consoante. Nesse exemplo os alunos ficaram com dúvidas sobre como proceder com a condição de iniciar com a consoante, sendo que alguns deles calcularam a permutação com repetição de todas as letras e depois multiplicou por três que são as possibilidades de consoantes, ou seja, $\frac{6!}{3!} \times 3$. Como os estagiários estavam auxiliando os alunos nas carteiras, foi explicado para os alunos como resolveria esse exercício para quem estava com dúvidas e dificuldade nessa parte. Após as explicações e auxílios ou alunos conseguiram resolver o exercício que foi corrigido no quadro logo em seguida.

Na sequência, foi mostrada a imagem que mostra uma forma de lembrar a diferença entre arranjo e combinação e foi explicado que essas ideias ajudam para tirar eventuais dúvidas sobre qual fórmula utilizar em exercícios que envolvem esses conceitos.

Para explicar o conceito de arranjo simples começamos pensando em como poderíamos organizar 5 dentre 8 livros em uma prateleira. Os alunos disseram que poderiam formar grupos de cinco livros e nesses grupos poderia utilizar a permutação. Como a ideia dos alunos estava correta, foi complementada a resposta dos mesmos explicando que nesse caso não haveria repetição pois se tratava de livros e não é possível dois livros ocuparem o mesmo local. Em seguida, foi explicado que para o primeiro livro na prateleira havia oito possibilidades por se tratar de oito livros, já para o segundo livro havia somente sete possibilidades de livros disponíveis pois um deles já havia sido colocado. Para os demais esse padrão repetiria, logo, para organizar cinco dos oito livros na prateleira bastava multiplicar $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$.

Além disso, foi realizada uma associação com a fórmula de permutação, em que é possível observar que ao organizar cinco dos oito livros disponíveis, faz-se uma permutação dos oito livros e desconsidera-se a permutação dos livros que não serão organizados, ou seja, de três livros, desse modo, descartando-se a permutação dos livros que não são organizados chegamos à mesma resposta obtida na multiplicação $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$ que corresponde à exatamente o conceito de arranjo simples.

Após resolvido a situação, formalizamos o conceito de arranjo simples e foi passado um exemplo para que os alunos resolvessem. O exemplo consistia em calcular possibilidades de classificação para os dois primeiros lugares de um campeonato de futebol que é disputado por 20 equipes. Os alunos conseguiram resolver com facilidade esse exercício. Um dos alunos comentou que esse exercício era mais fácil por se tratar de algo que já tinha conhecimento. Após todos terminarem de resolver esse exercício, foi feita a resolução no quadro.

Para introduzir o conceito de combinação, pedimos quantas duplas poderíamos formar em um grupo de quatro pessoas. Para isso, listamos todos os casos possíveis (A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D) e (C, D). Após isso, explicamos que realizamos uma combinação de quatro elementos tomados dois a dois. Em seguida relatamos que se o problema pedisse um número maior de duplas iria ser mais trabalhoso contar os casos possíveis e para isso seria interessante conhecer uma maneira mais prática para isso. Dessa forma, formalizamos o conceito e propomos um exercício.

Denotamos os seis times por: A, B, C, D, E e F. Em seguida, listamos toda as possibilidades de jogos (A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (A, F), (B, C), (C, D), (B, D), (B, E), (B, F), (C, D), (C, E), (C, F), (D, E), (D, F). Portanto são 15 jogos. Também resolvemos o exercício aplicando na fórmula de combinação. Como os alunos não tiveram nenhuma dúvida, fomos para os próximos e últimos três exercícios.

Explicamos o primeiro que era sobre formas de combinar tecidos e pedras para confecção de um vestido, nesse exercício auxiliamos de carteira em carteira e depois de aproximadamente cinco minutos corrigimos no quadro pois todos já haviam chegado na resposta correta. No segundo exercício, os estudantes também não tiveram muita dificuldade, ao debatermos se a ordem importava e perceber que não importava e então estávamos diante de um problema de combinação, logo a grande maioria chegou ao resultado correto sem muita dificuldade. Percebemos isso e então corrigimos o exercício no quadro.

O último exercício envolvia os conceitos da aula e a ideia de probabilidade que seria trabalhado no próximo encontro, tal exercício já foi escolhido e organizado por último de forma a servir como uma introdução para a próxima aula. Então debatemos com a turma a situação e o cálculo, percebendo que estávamos diante de um problema que envolvia arranjo simples, essa primeira parte foi calculada sem muita dificuldade pelos alunos, encontrando o valor de 90 possibilidades de senhas diferentes. Então explicamos que a probabilidade de um evento pode ser representada com uma fração a qual o denominador representa o todo, nesse caso 90, já o numerador era a quantidade de vezes que poderia acontecer determinada ação, como ele queria descobrir na primeira tentativa seria uma chance em 90 de acertar, chegando assim a resposta correta.

Como havíamos terminado todos os exercícios e estava na hora do término da aula, avisamos que a próxima aula seria nosso último encontro presencial e então dispensamos os alunos, finalizando assim o 8° encontro.

2.11 Módulo/encontro 9 -

2.11.1 Plano de aula

PLANO DE AULA

Público-alvo: Alunos do 1º ano do ensino médio.

Conteúdo: Probabilidade.

Objetivo geral: Trabalhar o conceito de probabilidade a partir da história da matemática.

Objetivos específicos: Objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar fenômenos que ocorrem ao acaso;
- Entender conceitos de probabilidade;
- Resolver problemas envolvendo os conceitos estudados.

Recursos didáticos: Slides, quadro e giz.

Duração: 1 hora/aula.

Encaminhamento metodológico:

"A probabilidade é o ramo da matemática que pretende modelar fenômenos não determinísticos, isto é, aqueles fenômenos em que o "acaso" representa um papel preponderante." (VIALI, 2008, p.143).

- Questionar os alunos fenômenos que ocorrem ao acaso?

Exemplos de eventos caso os alunos não respondam, ou complementar suas respostas: Lançar um dado ou moeda e observar a sua face, sorteio de um número de uma rifa, ganhar na mega sena.

Inicialmente, com a sala dividida em grupos, vamos trabalhar situações do dia a dia e de conhecimento do senso comum dos alunos para introduzir a ideia de probabilidade.

Primeiro distribuiremos os seguintes objetos entre os grupos: Moedas, dados, baralho de 52 cartas e uma reflexão apresentada nos slides.

Para começar a dinâmica vamos pedir qual é a chance de cair cara ao jogar uma moeda para cima. Iremos debater a situação e explicar que temos duas possibilidades, cara ou coroa, e por isso será uma chance em duas.

Após isso, faremos a mesma ideia para o dado, pedindo qual a chance de cair a face 6 voltada para cima. Será explicado que é uma possibilidade de um total de seis pois o dado possui seis faces diferentes.

Em seguida, questionaremos quais as chances de ao pegar uma carta aleatória do baralho de 52 cartas encontrar uma carta:

a) Com naipe vermelha;
b) Com a naipe de copas;
c) Com o número 4;

Como um baralho de 52 cartas tem quatro naipes sendo duas de cor vermelha e duas de cor preta, além de treze classificações nas cartas que compreendem o número dois a dez, o valete, a rainha, o rei, e o ás. Então na alternativa a temos 26 chances em 52, na alternativa b a naipe de copas corresponde a $\frac{1}{4}$ das 52 cartas, logo temos 13 chances de 52, por fim, na alternativa c temos quatro cartas

de classificadas como 4, logo temos quatro chances de 52.

Por fim apresentaremos em um slide a seguinte reflexão:

Reflexão: Foi escolhido um número entre 0 a 9, você tem uma chance de tentar adivinhar qual foi, diga a um dos professores qual será sua aposta. BOA SORTE.

Então antes de mostrar qual foi o número escolhido vamos pedir para calcularem qual a chance de cada grupo ter acertado. Concluiremos que como foi escolhido um número entre os 10, então é um em dez a chance de acertar.

Feito isso, revelaremos que o número escolhido era o 6.

Com esses exemplos trabalhados iremos continuar com a teoria a respeito do conteúdo e a qualquer momento da aula que se julgar necessário os professores poderão utilizar esses exemplos para explicação dos conceitos.

Após isso, explicar que nem sempre o acaso foi visto como algo natural e apresentar o jogo do osso.

Na história, fenômenos ocorridos ao acaso eram percebidos como fruto ou obra da divindade. Ainda hoje a ideia de eventos aleatórios não é tão natural e aceita. Como afirmou Kendall, (1997), "a humanidade precisou de centenas de anos para se acostumar com um mundo onde alguns eventos não tinham causa... ou eram determinados por causas tão remotas que somente podiam ser razoavelmente representados por modelos probabilísticos."

As primeiras manifestações probabilísticas surgiram nos jogos de azar, especificamente o jogo do osso praticado com astrágalos e jogos de dados. Existem provas arqueológicas da prática do jogo do osso a 40000 anos atrás, e de jogos com dados cerca de 3000 a. c na Índia e Mesopotâmia. O astrálago é o ancestral do dado, formado por um osso de um animal e o formato de um tetraedro irregular. Devido ao seu formato irregular, ao lançar o osso apenas quatro de seus lados são estáveis o suficiente para permitir que o osso pare sobre ele. As faces maiores eram numeradas com 3 e 4 e as menores com 1 e 6. Os valores 2 e 5 ficavam omitidos.

Figura 94: Astrálago.

Fonte: VIALI, 2008, p. 144.

Devido a forma irregular do astrágalo, as probabilidades de ocorrências de cada uma das quatro faces são diferentes.

Repetindo um experimento inúmeras vezes, encontraram as seguintes probabilidades:

Quadro 3: Probabilidade de ocorrência de cada face do astrálago.

Face	1	3	4	6
Probabilidade	0,12	0,37	0,39	0,12

Fonte: Próprios autores.

Após isso, vamos introduzir conceitos importantes no estudo das probabilidades.

O espaço amostral é o conjunto de possíveis resultados indivisíveis de um experimento aleatório. Usualmente o espaço amostral é denotado por Ω.

Vejamos que ao lançar o astrágalo e observar o número ocorrido, podemos obter os valores 1, ou 3, ou 4, ou 6. O conjunto formado por esses valores é chamado de espaço amostral. E “lançar o astrágalo e observar o número ocorrido” é chamado de experimento aleatório.

Neste caso, temos $\Omega = \{1,3,4,6\}$.

Pela definição clássica de probabilidade temos que

Se Ω é o espaço amostral de um experimento aleatório e A um evento possível do espaço amostral, então a probabilidade de A é

$$P(A) = \frac{A}{\Omega}$$

Sendo que A e Ω são bem definidos (finitos) e os eventos de Ω são equiprováveis (mesma chance de ocorrer).

Observação: Vejamos que a ocorrência das faces do astrágalo não é um evento equiprovável, então não se aplica na definição clássica de probabilidade.

Após isso, mostrar algumas propriedades no cálculo de probabilidades.

No cálculo de probabilidade temos algumas importantes propriedades:

1) $P(\Omega) = 1$(evento certo) e $P(\emptyset) = 0$ (evento impossível).
2) A probabilidade de um evento do espaço amostral está sempre entre 0 e 1.
3) Sejam A e B dois eventos contidos no mesmo espaço amostral Ω. Então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Obs: Dois eventos, A e B, são mutuamente exclusivos se, e somente se, $A \cap B = \emptyset$. Nesse caso, temos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\emptyset)$, portanto:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

4) Sejam A e B dois eventos contidos no mesmo espaço amostral Ω. Se A e B são eventos independentes então:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Exemplos das propriedades

a) Foram lançados dois astrágalos. Qual a probabilidade de ocorrer 1 e 3 simultaneamente? Qual a probabilidade de ocorrer 4 e 6 simultaneamente?

   R: Sejam os eventos A: ocorrer 1, B: ocorrer 3, C: ocorrer 4 e D: ocorrer 6.

$$P(A \cap B) = 0{,}12 \times 0{,}37 = 0{,}0444$$

$$P(C \cap D) = 0{,}39 \times 0{,}12 = 0{,}0468$$

b) Foram lançados dois astrágalos. Qual a probabilidade de ocorrer 1 ou 3? Qual a probabilidade de ocorrer 4 ou 6 simultaneamente?

$$P(A \cup B) = 0{,}12 + 0{,}37 - 0{,}0444 = 0{,}4456$$

$$P(4\ ou\ 6) = 0{,}39 + 0{,}12 - 0{,}0468 = 0{,}4632$$

c) "Os jogos dos gregos e romanos eram realizados com quatro astrágalos e o maior lance era a obtenção de quatro faces diferentes voltadas para cima que era denominada de jogada de Vênus. O lance menos valioso, conhecido como "os cães" era a obtenção de quatro uns" (VIALI, 2008, p.144).

Conhecendo a probabilidade de ocorrência de cada face, qual a probabilidade de obter em um lance a jogada "Vênus"? E a Jogada "os cães"?

$$P(Jogada\ Vênus) = 0{,}12 \times 0{,}37 \times 0{,}39 \times 0{,}12 = 0{,}002$$

$$P(Jogada\ os\ cães) = 0{,}12 \times 0{,}12 \times 0{,}12 \times 0{,}12 = 0{,}0002$$

Em seguida iremos trabalhar um dinâmica da megasena. Distribuiremos um cartão de megasena para cada aluno e mostraremos uma nota de R$ 100 reais para eles e pedir para que cada um fizesse uma aposta com 6 números na cartela da megasena. Então vamos sortear com um sorteador de 60 bolas. Se tiver um ganhador ou ganhadora os R$ 100 reais serão dessa pessoa. Então vamos realizar o sorteio e verificar se alguém ganhou a aposta. Acredita-se fortemente que ninguém vai ter conseguido acertar as 6 bolas, então perguntaremos para os alunos o porquê de ter sido arriscado uma nota de R$ 100 reais na dinâmica. Para responder iremos calcular a probabilidade que eles tinham de acertar da seguinte forma:

Como a ordem das bolas retiradas não importa então estamos diante de uma combinação de 60 elementos tomados 6 a 6. Logo a quantidade total de resultados possíveis é:

$$C_6^{60} = \frac{60!}{6!\,(60-6)!}$$

$$C_6^{60} = \frac{60!}{6!\,(54)!}$$

$$C_6^{60} = \frac{60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55 \times 54!}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 54!}$$

$$C_6^{60} = \frac{36045979200}{720}$$

$$C_6^{60} = 50063860$$

Ou seja, há um total de 50063860 sorteios possíveis. Como cada aluno fez uma única aposta então cada um terá 1 chance em 50063860. Ou seja, a probabilidade P é:

$$P = \frac{1}{50063860} \approx 0{,}00000002 = 0{,}000002\%$$

Exercícios

1) O jogo do osso era comumente utilizado para previsões sobre o futuro. Para isso eram jogados cinco dados de uma vez. Um exemplo sendo a seguinte adivinhação grega, chamada “o lance do Zeus salvador”: *Foram um 1, dois 3 e dois 4 ... Os deuses te deram um augúrio favorável. Não tire-o da cabeça, pois nenhum mal cairá sobre ti.* Qual a probabilidade de ocorrer esse augúrio favorável?

R: Inicialmente precisamos pensar em todas as ordens de cair um 1, dois 3 e dois 4. Observamos que, para isso vamos calcular uma permutação de 5 elementos sendo que temos duas repetições do número 3 e duas repetições do número 4. Também sabemos que estes números ocorrem simultaneamente, então

$$\frac{5!}{2!\,2!} \times\ 0.12 \times 0.37 \times 0{,}37 \times 0.39 \times 0.39 =\ 0.075$$

2) A vida na rua como ela é O Ministério do Desenvolvimento Social e Combate à Fome (MDS) realizou, em parceria com a ONU, uma pesquisa nacional sobre a população que vive na rua, tendo sido ouvidas 31.922 pessoas em 71 cidades brasileiras. Nesse levantamento, constatou-se que a maioria dessa população sabe ler e escrever (74%), que apenas 15,1% vivem de esmolas e que, entre os moradores de rua que ingressaram no ensino superior,0,7% se diplomou. Outros dados da pesquisa são apresentados nos quadros abaixo.

Figura 95: Quadro com os motivos das pessoas optarem por morar na rua.

Istoé, 7/5/2008, p. 21 (com adaptações).

No universo pesquisado, considere que P seja o conjunto das pessoas que vivem na rua por motivos de alcoolismo/drogas e Q seja o conjunto daquelas cujo motivo para viverem na rua é a decepção amorosa. Escolhendo-se ao acaso uma pessoa no grupo pesquisado e supondo-se que seja igual a 40% a probabilidade de que essa pessoa faça parte do conjunto P ou do conjunto Q, então a probabilidade de que ela faça parte do conjunto interseção de P e Q é igual a.

a) 12%;
b) 16%;
c) 20%;
d) 36%;
e) 52%.

Sabendo que a porcentagem de pessoas que vivem na rua por causa do alcoolismo/drogas é igual a 36% e que a porcentagem de pessoas que vivem na rua por causa de decepção amorosa é igual a 16%. Somando as duas temos 52%, como foi estipulado pelo enunciado que apenas 40% desses 52% vivem nas ruas por causa alcoolismo/drogas ou por decepção amorosa a interseção desses dois casos será a diferença dessas duas porcentagens: $52 - 40 = 12\%$.

3) (UFPI) Uma urna contém somente bolas vermelhas e pretas. Se somarmos 70% das bolas vermelhas com 20% das bolas pretas, obteremos 30% do total de bolas da urna. A probabilidade de, ao retirarmos uma bola dessa urna, esta ser vermelha é:

a) $1/2$;
b) $1/3$;
c) $1/4$;
d) $1/5$;
e) $1/6$;

Inicialmente, devemos relacionar o número de bolas vermelhas com as bolas pretas. Temos que a soma de 70% das bolas vermelhas com 20% das bolas pretas correspondem à 30% do total, ou seja, a soma de todas as bolas vermelhas com as pretas.

$$0{,}7V + 0{,}2P = 0{,}3(V + P)$$

$$0{,}7V + 0{,}2P = 0{,}3V + 0{,}3P$$

$$0{,}7V - 0{,}3V = 0{,}3V - 0{,}2P$$

$$0{,}4V = 0{,}1P$$

$$4V = 1P$$

Chegamos na relação entre as duas cores de bolas da urna, ou seja, a cada 4 bolas vermelhas, temos 1 preta.

Encontrando a probabilidade de retirar uma bola vermelha é:

$$P(V) = \frac{V}{Total}$$

$$P(V) = \frac{V}{V + P}$$

$$P(V) = \frac{V}{V + 4V}$$

$$P(V) = \frac{V}{5V}$$

$$P(V) = \frac{1}{5}$$

4) (UFPR) André, Beatriz e João resolveram usar duas moedas comuns, não viciadas, para decidir quem irá lavar a louça do jantar, lançando as duas moedas simultaneamente, uma única vez. Se aparecerem duas coroas, André lavará a louça; se aparecerem duas caras, Beatriz lavará a louça; e se aparecerem uma cara e uma coroa, João lavará a louça. A probabilidade de que João venha a ser sorteado para lavar a louça é de:

a) 25%;

b) 27,5%;

c) 30%;

d) 33,3%;

e) 50%;

Para João lavar a louça deve sair uma cara e uma coroa.

Analisando as possibilidades da ocorrência de sair uma cara e uma coroa, tem-se que somente em 2 possibilidades das 4 possíveis isso vai ocorrer. Logo, A probabilidade de João lavar a louça é

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Referências

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante Matemática 3.** São Paulo: Edições SM, 2016.

MODERNA, E. **Conexões com a matemática.** 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013.

VIALI, L. Algumas considerações sobre a origem da Teoria das Probabilidades. **Revista Brasileira de História da Matemática**. n. 16, v. 8, p. 143-153. Out. 2008.

2.11.2 Relatório encontro 9

No dia 09 de julho realizamos o nono encontro presencial do PROMAT, neste dia estavam presentes 5 alunos. Iniciamos comentando sobre o estudo de probabilidades e questionamos os alunos fenômenos que ocorrem ao acaso. Algumas respostas foram: raios, acidentes, ganhar na megasena. Então, mencionamos outros exemplos como, sorteio de um número de rifa, jogar uma moeda e observar a face.

Após isso, distribuímos uma moeda para cada aluno e pedimos qual seria a chance ou a probabilidade de ao jogar uma moeda cair cara virada para cima. Os alunos responderam que era 50%, depois $\frac{1}{2}$ e ainda comentamos que também poderia representar como 0,5, anotamos esses valores no quadro.

Em seguida, realizamos o mesmo procedimento para um dado e escrevemos a chance de cair a face 5 virada para cima, os alunos responderam que era 1 para 6, ou seja, $\frac{1}{6}$. Explicamos que estava correto pois de 6 faces estávamos escolhendo 1delas, em outras palavras 1 dentre 6.

Seguimos com o mesmo procedimento, mas agora com um baralho de 52 cartas, primeiro perguntamos a chance de ao tirar uma carta aleatória do baralho obtermos uma carta com naipe vermelha, depois pedimos para a naipe de copas e também para o número 4. Após escrever no quadro as respostas dos alunos de tais probabilidades ou chances de ocorrer cada situação, apresentamos no slide a seguinte reflexão:

Reflexão: Foi escolhido um número entre 0 a 9, você tem uma chance de tentar adivinhar qual foi, diga a um dos professores qual será sua aposta. BOA SORTE.

Os alunos apostaram nos números 8, 9 4 7, 3. Mostramos que nenhum deles acertou o número escondido. Pedimos qual era a probabilidade que cada um tinha de acertar o número escondido. Eles responderam que era 1 em 10 ou $\frac{1}{10}$, pois tinha uma chance de escolha entre dez possibilidades. Também perguntamos qual a probabilidade de pelo menos algum deles acertar. Então responderam 5 em 10 ou $\frac{5}{10}$, ou seja, 50% de chance de alguém acertar.

Após isso, apresentamos aos alunos um pouco sobre o início dos cálculos probabilísticos. Explicamos que, na história eventos ao acaso nem sempre foram vistos como algo natural. Um fator que influenciou o estudo da probabilidade foram os jogos de azar. Comentamos sobre o Jogo do Osso ser um dos mais antigos, com provas arqueológicas de sua existência a 40000 anos. Este jogo era praticado com um astrálago, osso de um animal. Por ser um osso, possui formato irregular, assim, nem todos os lados são estáveis suficientes para que o osso pare sobre eles. Os lados maiores eram marcados com os números 3 e 4, e os menores com 1 e 6. Ficando omitidos o 2 e 5. Por seu formato irregular, as probabilidades de ocorrências dos quatro números eram diferentes e foram obtidas com a realização de alguns experimentos. Então, mostramos nos slides uma tabela com o número de cada lado do osso e a sua probabilidade.

Em seguida, introduzimos alguns conceitos como espaço amostral e a definição clássica de probabilidade. Foi explicado que o espaço amostral é o conjunto de todos os eventos possíveis e a amostra é uma parte do espaço amostral que atende aos requisitos do evento em estudo. A probabilidade de cada evento é dada pela divisão do evento pelo espaço amostral. Foram citados exemplos de cada conceito, como as faces da moeda e do dado. Os alunos prestaram atenção nas explicações e não demonstraram dúvidas.

Após essas definições foram explicadas as propriedades do cálculo de probabilidades, ou seja, que a probabilidade de um evento impossível é zero, pois não tem como um evento impossível acontecer, e que a probabilidade do espaço amostral é igual a um, pois corresponde à soma de todas as probabilidades. Como consequência dessas propriedades, a probabilidade de um evento está sempre entre zero e um.

Em seguida foi passado as propriedades de união e interseção de eventos. Para exemplificar a propriedade de união, supomos que 3 dos alunos estudavam inglês 3 estudavam espanhol, sendo que destes alunos, 2 estudavam espanhol e inglês simultaneamente. Logo, o cálculo da probabilidade de escolher aleatoriamente um aluno que estude inglês ou espanhol é dado por $P(A\ U\ B) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$, logo, a probabilidade é maior que um. Isso significa que existe uma interseção de alunos que estudam os dois idiomas e essa interseção deve ser tirada. Foi pedido aos alunos se eles compreenderam e eles disseram que sim.

Foi explicado em seguida a propriedade da união de eventos mutuamente excludentes, onde a união seria somente a soma dos eventos, pois se são mutuamente excludentes a interseção será igual a zero. A última propriedade a ser passada foi a de interseção de eventos que para ser calculada basta multiplicar a probabilidade de cada evento. Para exemplificar, foi utilizado o exemplo do cálculo da probabilidade de ao jogar um dado não viciado de seis faces sair uma face com um número par (evento A) e ser o número seis (Evento B). Essa probabilidade é dada por $P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Os alunos disseram ter compreendido as propriedades.

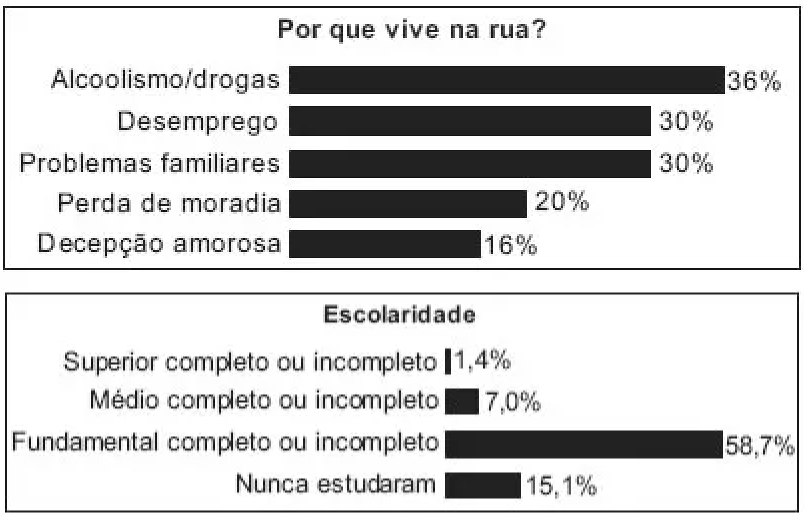
Começamos os exemplos preparados. Para cada exemplo deixamos um tempo para cada um e depois corrigimos no quadro. O terceiro exemplo se tratava de duas jogadas realizadas por gregos e romanos, na qual utilizavam quatro astrálagos. A jogada Vênus, que era a obtenção dos quatro números diferentes, um em cada osso, e da jogada "os Cães", na qual era a obtenção de quatro números um. A jogada Vênus era a mais valiosa e a jogada os Cães a menos valiosa. No exemplo, pedia a probabilidade de cada uma das jogadas.

Após os exemplos, fizemos uma dinâmica de apostar na mega sena. Entregamos para cada aluno uma ficha de aposta para que cada um escolhesse seis números. Logo depois, foram sorteados os números 30, 46, 26, 25, 59, 11.

Então analisamos que ninguém conseguiu nem se aproximar de ganhar, com isso falamos que nós não íamos arriscar 100 reais havendo uma grande possibilidade de alguém ganhar. Assim pedimos qual seria a probabilidade de cada um ganhar, e então deixamos um tempo para os alunos tentarem enquanto prestávamos auxílios

O primeiro exercício, se tratava sobre o jogo do osso ser utilizado para previsões do futuro. Para isso, eram jogados cinco dados de uma vez. Um exemplo é o “lance do Zeus salvador”, no qual dizia, “Foram um 1, dois 3 e dois 4 ... Os deuses te deram um augúrio favorável. Não tire-o da cabeça, pois nenhum mal cairá sobre ti”. E perguntava qual a probabilidade de ocorrer esse augúrio favorável?

Deixamos alguns minutos para os alunos resolverem e então começamos a correção. Explicamos que para ocorrer o augúrio favorável, deve-se ter um 1, dois 3 e dois 4, mas não necessariamente nesta ordem. Para mostrar isso, no quadro escrevemos algumas maneiras de obter esses números nos cinco ossos, por exemplo, 1, 3, 3, 4 e 4, ou 3, 1, 3, 4 e 4 ou 4, 1, 4, 3, 3. Um aluno mencionou que era a mesma ideia que fizemos com uma fila de pessoas na aula passada, então concordamos e comentamos que por isso poderíamos olhar como um caso de permutação com repetição, que seguia a ideia dos anagramas com repetições trabalhados na aula anterior. Então, fizemos uma permutação de cinco elementos, observando que temos o 3 e o 4 repetindo duas vezes. O resultado da permutação, multiplicamos pelas probabilidades de cada número obtido no osso, assim, obtemos a probabilidade do augúrio favorável ocorrer. Terminando a correção, apresentamos o segundo exercício, solicitando que tentassem resolver. Para o segundo exercício, ou seja, o que dizia que o Ministério do Desenvolvimento Social e Combate à Fome (MDS) realizou, em parceria com a ONU, uma pesquisa nacional sobre a população que vive na rua, tendo sido ouvidas 31.922 pessoas em 71 cidades brasileiras. Nesse levantamento, constatou-se que a maioria dessa população sabe ler e escrever (74%), que apenas 15,1% vivem de esmolas e que, entre os moradores de rua que ingressaram no ensino superior, 0,7% se diplomou. Outros dados da pesquisa são apresentados nos quadros abaixo.



Istoé, 7/5/2008, p. 21 (com adaptações).

No universo pesquisado, considere que P seja o conjunto das pessoas que vivem na rua por motivos de alcoolismo/drogas e Q seja o conjunto daquelas cujo motivo para viverem na rua é a decepção amorosa. Escolhendo-se ao acaso uma pessoa no grupo pesquisado e supondo-se que seja igual a 40% a probabilidade de que essa pessoa faça parte do conjunto P ou do conjunto Q, então a probabilidade de que ela faça parte do conjunto interseção de P e Q é igual a.

f) 12%;

g) 16%;

h) 20%;

i) 36%;

j) 52%.

Nesse exercício os alunos conseguiram resolver rapidamente, apenas uma aluna comentou que não sabia o que faria com o total de entrevistados, ou seja, com o número 31.922. Os demais identificaram que bastava aplicar a propriedade de união de eventos para encontrar a interseção, uma vez que o exercício fornecia a união dos eventos P e Q que era igual a 40%. Para resolver esse exercício foi pedido que um dos alunos fosse resolver no quadro e explicar para os demais colegas. Dois dos alunos se disponibilizaram e fizeram a resolução explicando a forma em que utilizaram para resolver que foi utilizando as propriedades de união e interseção de eventos.

Para o terceiro exercício, ou seja, o que dizia que uma urna contém somente bolas vermelhas e pretas. Se somarmos 70% das bolas vermelhas com 20% das bolas pretas, obteremos 30% do total de bolas da urna. A probabilidade de, ao retirarmos uma bola dessa urna, esta ser vermelha é:

a) $1/2$;

b) $1/3$;

c) $1/4$;

d) $1/5$;

e) $1/6$;

Como não havia tempo para deixar eles resolverem sozinhos, foi feito o exercício juntamente com a turma, ou seja, foi explicado que inicialmente, devemos relacionar o número de bolas vermelhas com as bolas pretas. Temos que a soma de 70% das bolas vermelhas com

20% das bolas pretas correspondem à 30% do total, ou seja, a soma de todas as bolas vermelhas com as pretas.

$$0{,}7V + 0{,}2P = 0{,}3(V + P)$$
$$0{,}7V + 0{,}2P = 0{,}3V + 0{,}3P$$
$$0{,}7V - 0{,}3V = 0{,}3V - 0{,}2P$$
$$0{,}4V = 0{,}1P$$
$$4V = 1P$$

Chegamos na relação entre as duas cores de bolas da urna, ou seja, a cada 4 bolas vermelhas, temos 1 preta.

Encontrando a probabilidade de retirar uma bola vermelha é:

$$P(V) = \frac{V}{Total}$$
$$P(V) = \frac{V}{V + P}$$
$$P(V) = \frac{V}{V + 4V}$$
$$P(V) = \frac{V}{5V}$$
$$P(V) = \frac{1}{5}$$

Terminada a resolução, foi agradecida a presença e a participação de todos durante os sete encontros presenciais do PROMAT e desejado sucesso aos alunos. Feito isso encerramos a aula.

2.12Módulo/encontro 10 -

2.12.1 Plano de aula

PLANO DE AULA

Público-Alvo:

A aula preparada se destina aos alunos que participarão do PROMAT que é um Projeto de Ensino institucional do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática que visa atender alunos da rede pública estadual de ensino. As atividades são direcionadas aos estudantes que buscam acesso aos cursos superiores.

Tempo de execução: 30 minutos.

Conteúdo: Tratamento da informação.

Objetivo Geral: Trabalhar tratamento da informação.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com tratamento da informação, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Reconhecer diferentes tipos de gráficos.
- Interpretar gráficos, tabelas e esquemas.

Recursos Didáticos: Slides.

Encaminhamento metodológico:

As pesquisas estatísticas estão presentes em nosso cotidiano em diversas situações. Órgãos como o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) utilizam pesquisas para diagnosticar características da população, fazer projeções, entre outros, auxiliando no planejamento do país.

Em uma pesquisa, chama-se de **universo estatístico** ou **população estatística**, o conjunto formado por todos os elementos que possam oferecer dados relativos ao assunto em questão.

Quanto o universo estatístico é muito vasto ou quando não é possível coletar dados de todos os elementos desse universo, seleciona-se um subconjunto dele, chamado **amostra**, no qual os dados para a pesquisa são coletados.

Cada elemento investigado é chamado de **variável estatística** ou, **simplesmente variável**.

Por exemplo, certa loja realizou uma pesquisa com os funcionários e elaborou uma tabela para representar os resultados.

Quadro 4: Resultados obtidos na pesquisa realizada pela loja.

Nome	**Grau de instrução**	**Estado civil**	**Número de filho**	**Altura (m)**	**Massa (kg)**
Andréa	Ensino Fundamental	solteiro	0	1,62	65,8
Carlos	Ensino Médio	casado	1	1,74	73,5
Danieli	Ensino Médio	casado	1	1,53	61,1

Fátima	Ensino Médio	solteiro	1	1,58	54,7
Jéssica	Ensino Fundamental	casado	1	1,56	53,2
Júlio	Ensino Superior	solteiro	0	1,79	83,2
Pedro	Ensino Médio	casado	2	1,82	79,6
Ricardo	Ensino Fundamental	solteiro	0	1,69	63,5
Sérgio	Ensino Superior	casado	2	1,87	84,7

Fonte: SOUZA; PATARO, 2012, p.178.

As variáveis investigadas nessa pesquisa são: nome, grau de instrução, estado civil, número de filhos, altura e massa. Além disso, as variáveis estatísticas são classificadas em qualitativas ou quantitativas.

Na pesquisa realizada pela loja, as variáveis qualitativas são identificadas por nomes, por exemplo, nome, grau de instrução e estado civil. Já as variáveis quantitativas são expressas em números, por exemplo, número de filhos, altura e massa.

Tipos de Gráficos

Há diversos tipos de gráficos, cada um deles é mais prático ou eficiente para cada tipo de informação ou dado estatístico a ser trabalhado. Eles, geralmente, comparam informações qualitativas e quantitativas, podendo envolver também o tempo e o espaço. Por isso conhecer os principais é importante para fazer uma leitura correta dos dados. Destaca-se os de coluna, em barras, setores e linha.

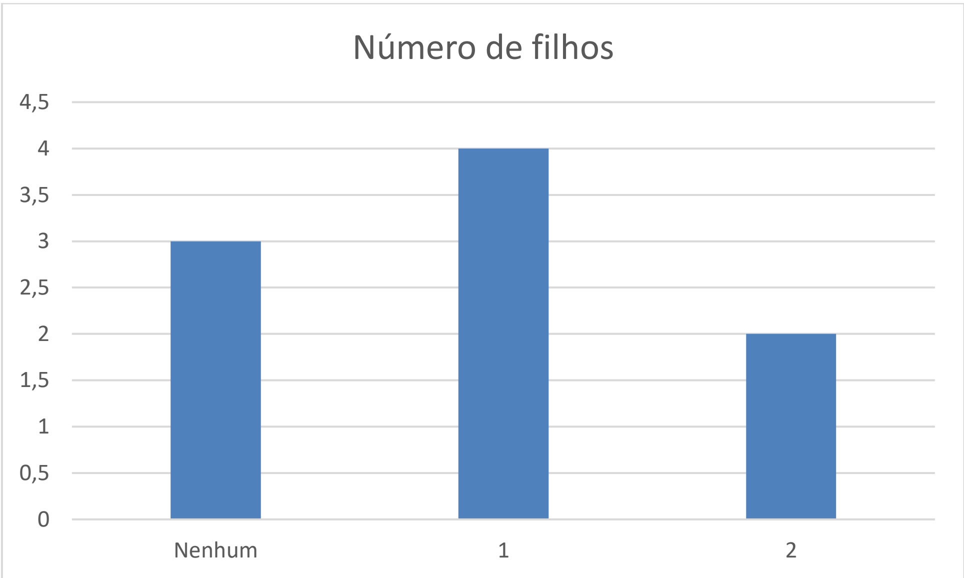
Gráficos de coluna

Costumam indicar um dado quantitativo sobre diferentes variáveis, lugares ou setores e não dependem de proporções. Os dados são indicados na posição vertical, enquanto as divisões qualitativas apresentam-se na posição horizontal.

Figura 96: Exemplo gráfico de coluna.

Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/geografia/tipos-graficos.htm

Figura 97: Gráfico de colunas do número de filhos retirados do Quadro 3.



Fonte: Próprios autores.

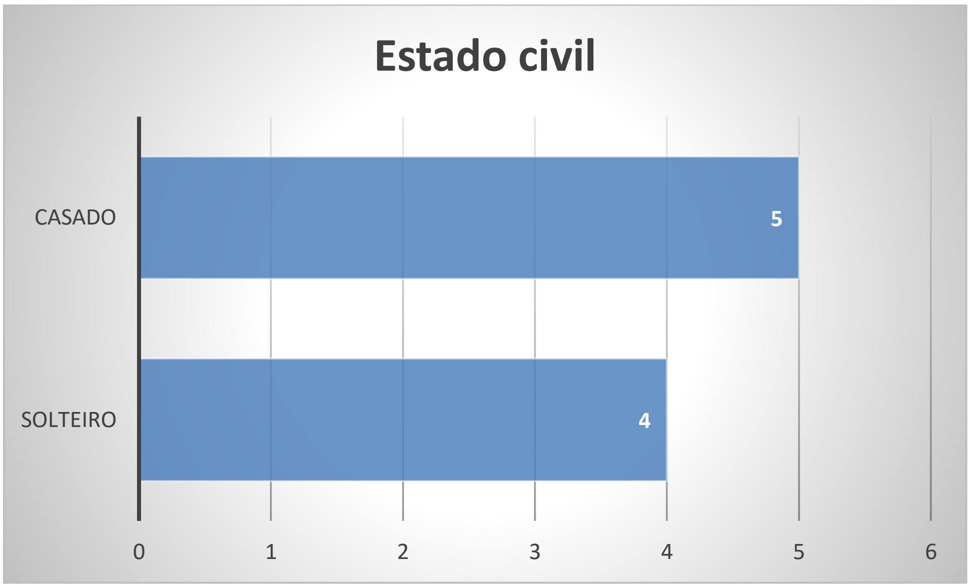
Gráficos em barra

Sua função se assemelha muito com o gráfico de coluna, com a diferença de os dados se localizarem na posição horizontal e as informações e divisões na posição vertical.

Figura 98: Exemplo gráfico em barra.

Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/geografia/tipos-graficos.htm

Figura 99: Gráfico de barras das informações retiradas do Quadro 3 sobre o estado civil.



Fonte: Próprios autores.

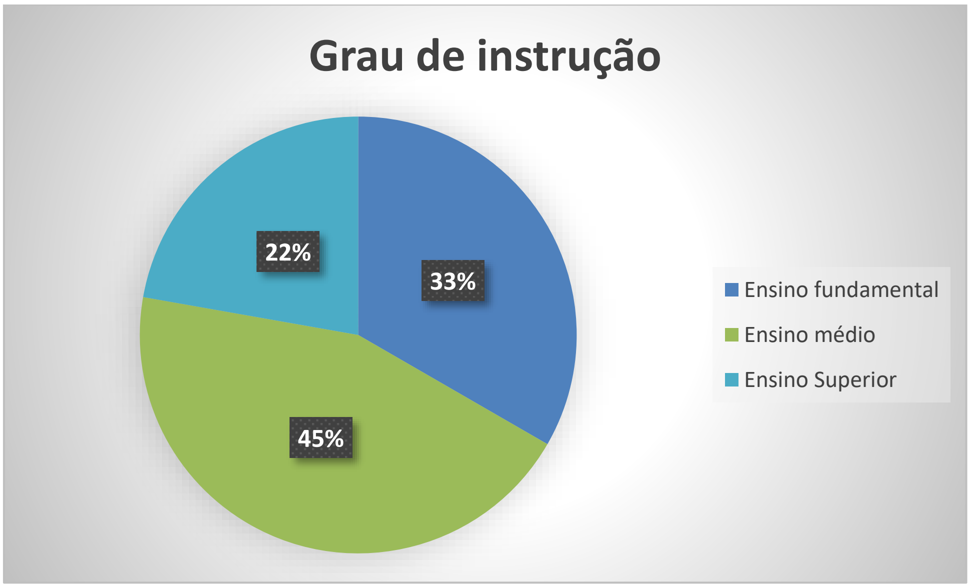
Gráficos em setores

É indicado para expressar uma relação de proporcionalidade, em que todos os dados somados compõem o todo de um dado aspecto da realidade.

Figura 100: Exemplo gráfico em setores.

Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/geografia/tipos-graficos.htm

Figura 101: Gráfico de setores do grau de instrução dos dados do Quadro 3.

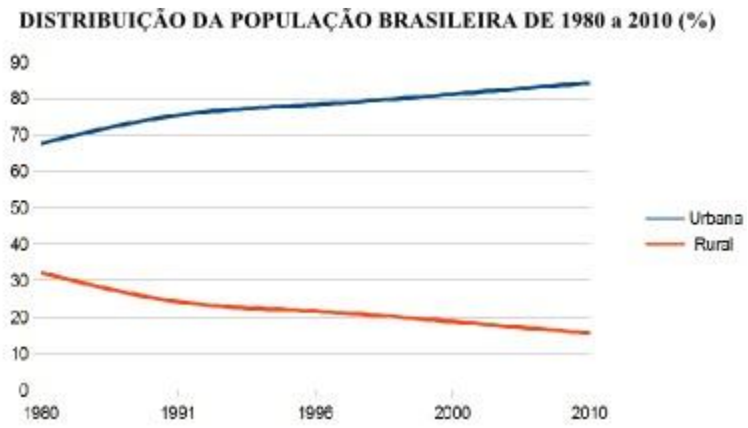


Fonte: Próprios autores.

Gráficos em linhas

É utilizado para demonstrar uma sequência numérica de um certo dado ao longo do tempo. É indicado para demonstrar evoluções (ou regressões) que ocorrem em sequência para que o comportamento dos fenômenos e suas transformações seja observado.

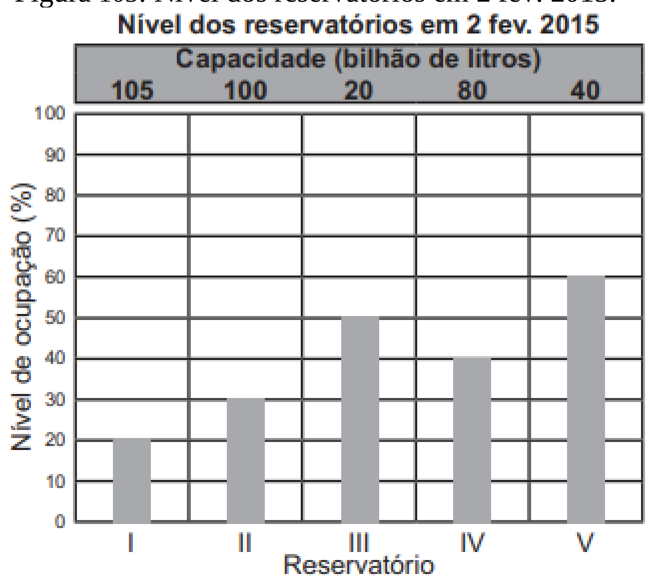
Figura 102: Exemplo de gráfico em linhas.



Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/geografia/tipos-graficos.htm

1) (ENEM 2021) O gráfico apresenta o nível de ocupação dos cinco reservatórios de água que abasteciam uma cidade em 2 de fevereiro de 2015.

Figura 103: Nível dos reservatórios em 2 fev. 2015.



Fonte: ENEM 2021.

Nessa data, o reservatório com o maior volume de água era o

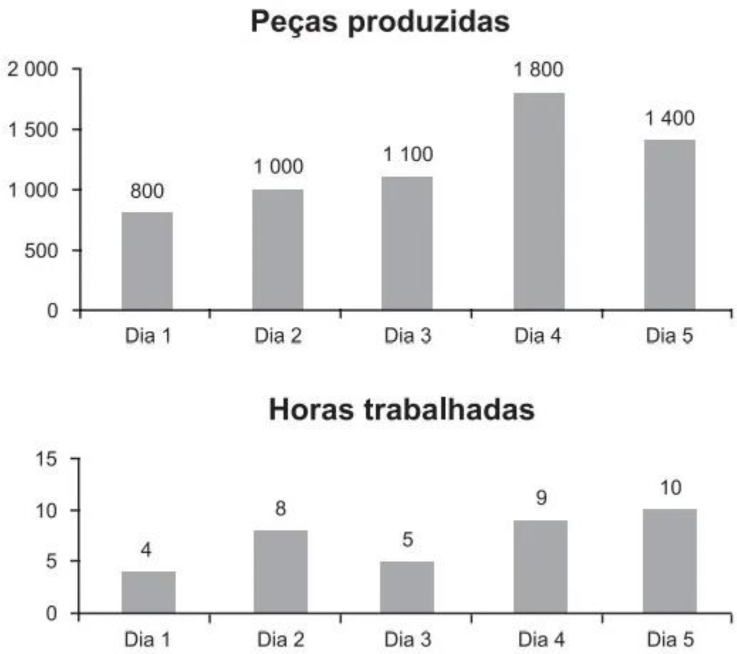
A) I.

B) II.
C) III.
D) IV.
E) V.

R: Precisamos calcular o volume de água em cada reservatório. Pelo gráfico observamos que a capacidade em bilhões de litros do reservatório I é 105, do reservatório II é 100, do reservatório III é 20, do V é 80, do IV é 40. E possuem o nível de ocupação de 20%, 30%, 50%, 40% e 60%, respectivamente.
Fazendo os cálculos do volume temos,
reservatório I: 20% de 105 = 21.
reservatório II: 30% de 100 = 30.
reservatório III: 50% de 20 = 10.
reservatório IV: 40% de 80 = 32.
reservatório V: 60% de 40 = 24.
Alternativa D).

Exercício 2: (Enem 2020) Os gráficos representam a produção de peças em uma indústria e as horas trabalhadas dos funcionários no período de cinco dias. Em cada dia, o gerente de produção aplica uma metodologia diferente de trabalho. Seu objetivo é avaliar a metodologia mais eficiente para utilizá-la como modelo nos próximos períodos. Sabe-se que, neste caso, quanto maior for a razão entre o número de peças produzidas e o número de horas trabalhadas, maior será a eficiência da metodologia.

Figura 104: Peças produzidas e horas trabalhadas.



Fonte: https://www.projetoagathaedu.com.br/questoes-enem/matematica/interpretacao-de-graficos.php. Acesso em: 12 jul. 2022

Em qual dia foi aplicada a metodologia mais eficiente?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

R: Vamos calcular a razão entre o número de peças produzidas e o número de horas trabalhadas para cada dia.

Dia 1: $\frac{peças\ produzidas}{horas\ trabalhadas} \to \frac{800}{4} = 200$

Dia 2: $\frac{peças\ produzidas}{horas\ trabalhadas} \to \frac{1000}{8} = 125$

Dia 3: $\frac{peças\ produzidas}{horas\ trabalhadas} \to \frac{1100}{5} = 220$

Dia 4: $\frac{peças\ produzidas}{horas\ trabalhadas} \to \frac{1800}{9} = 200$

Dia 5: $\frac{peças\ produzidas}{horas\ trabalhadas} \to \frac{1400}{10} = 140$

Percebemos que a maior razão é 220. Portanto a metodologia mais eficiente foi aplicada no dia 3. Letra c).

Referências:

D'AMBROSIO, U. Por que se ensina Matemática? Disponível em: http://apoiolondrina.pbworks.com/f/Por%2520que%2520ensinar%2520Matematica.pdf Acessado em: 20 jul. 2017.

ENEM 2021 – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos . Acessado em: 9 mar. 2022.

INTERPRETAÇÃO de gráficos. **Projeto Agatha**. Disponível em: https://www.projetoagathaedu.com.br/questoes-enem/matematica/interpretacao-de-graficos.php. Acesso em: 12 jul. 2022

MODERNA, E. **Conexões com a matemática.** 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013.

SOUZA, J.; PATARO, P. M. **Vontade de saber matemática 9° ano**. São Paulo: FTD, 2012.

TIPOS de gráfico. **Mundo Educação**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/geografia/tipos-graficos.htm. Acessado em: 12 jul. 2022.

2.12.2 Relatório encontro 10

Aula assíncrona, na qual gravamos um vídeo por meio da plataforma JitsiMeet do conteúdo preparado no plano de aula e disponibilizamos na plataforma Youtube por meio do link https://youtu.be/TbggzDzzLd0. O vídeo tem duração de 33 minutos e 57 segundos e contempla o plano de aula na íntegra.

Cada integrante do grupo gavou uma parte do plano, sendo anexadas essas partes em um único vídeo durante a edição do vídeo. Após a edição, o vídeo foi indexado no site Youtube.

Para os alunos terem acesso a este vídeo, enviamos três dias após o último encontro presencial o link através do WhatsApp, onde tínhamos um grupo para nos comunicarmos com os alunos. Não houveram dificuldades durante as gravações e edições dos vídeos.

2.6 PROMAT - Considerações Finais

No ano de 2021 já havíamos realizado o PROMAT, porém de forma remota devido a pandemia causada pelo coronavírus. Neste ano tivemos oportunidade de experienciar a prática docente no projeto de forma presencial.

Em nossas aulas nos deparamos com alunos interessados no que tínhamos para ensinar, não encontramos tantos problemas com conversas e distrações como na execução da regência no ensino médio. Conforme o decorrer dos encontros, a quantidade de alunos que frequentavam as aulas foi diminuindo. Porém, os alunos que concluíram o projeto estavam presentes desde nosso primeiro dia.

Além disso, as dinâmicas realizadas durante as aulas se tornaram grandes aliadas para envolver os alunos, levando-os a participar mais ativamente da aula. Era notável a diferença no rendimento dos alunos quando era abordada somente a teoria e quando era realizada alguma dinâmica.

De modo geral, o PROMAT contribuiu de maneira significativa para o nosso desenvolvimento enquanto futuros docentes, pois nos deparamos com problemas reais enfrentados dentro de uma sala de aula, sendo o que ficou mais evidente a defasagem no aprendizado relativo à matemática básica que acaba atrapalhando o aprendizado de novos conceitos matemáticos.

Referências

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação, 2000.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.
ECHEVERRÍA, M. del P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (org.). **A solução de problemas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998. p. 13-43.

MÜLLER, I. Tendências atuais de educação matemática. **Revista de ensino, educação e ciências humanas**, v. 1, n. 1, p. 133-144, 2000.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Editora Interciência Ltda, 1995.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v. 6, n. 1, p. 299-311, 2012.

SCHRODER, T. L.; LESTER, F. K., Jr. **Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving**. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). New directions for elementary school mathematics. Reston: NCTM, 1989.p.31-42.